

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA – UFPB
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL

TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

JOÃO PAULO DOS SANTOS VERÍSSIMO

**EFEITOS DA PROTENSÃO NA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIGAS
DE CONCRETO**

JOÃO PESSOA

2018

JOÃO PAULO DOS SANTOS VERÍSSIMO

**EFEITOS DA PROTENSÃO NA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIGAS
DE CONCRETO**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Engenharia Civil do Centro de Tecnologia da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial à obtenção do título de bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Hidelbrando José Farkat Diógenes

JOÃO PESSOA

2018

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

V516e Veríssimo, João Paulo Dos Santos.

Efeitos da protensão na frequência natural de vigas de concreto / João Paulo Dos Santos Veríssimo. - João Pessoa, 2018.

72 f. : il.

Orientação: Hidelbrando José Farkat Diógenes.
Monografia (Graduação) - UFPB/CT.

1. Frequência Natural. 2. Protensão. 3. Dinâmica. 4. Concreto. 5. Estrutura. I. Diógenes, Hidelbrando José Farkat. II. Título.

UFPB/BC

FOLHA DE APROVAÇÃO

JOÃO PAULO DOS SANTOS VERÍSSIMO

EFEITOS DA PROTENSÃO NA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIGAS DE CONCRETO

Trabalho de Conclusão de Curso em 31/10/2018 perante a seguinte Comissão Julgadora:

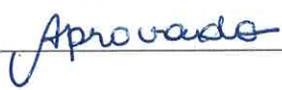


Prof. Dr. Hidelbrando José Fankat Diógenes
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB





Prof. Dra. Andrea Brasiliano Silva
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB





Prof. Dr. Givanildo Alves de Azeredo
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB





Prof.ª Ana Cláudia Fernandes Medeiros Braga
Matrícula Siape: 1668619
Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

*Dedico esse trabalho à minha mãe por ser
a responsável por toda minha educação.*

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Fátima, por todo o amor e atenção dedicados, toda educação e conhecimento transmitido, todo cuidado e carinho que fizeram mais fácil todo esse caminho percorrido.

À minha namorada, Gabriela, por todo amor, incentivo, companhia e companheirismo em todos os momentos, que, com certeza, foram indispensáveis para que conseguisse chegar ao fim da graduação.

À minha família, por sempre me apoiar e orientar nas decisões tomadas durante minha vida.

Aos professores Hidelbrando, Andrea e Givanildo que com toda paciência, dedicação e atenção sempre me ajudaram em tudo que foi preciso para desenvolver esse trabalho e concluir o curso.

Aos grandes amigos, Davi Marinho, Danilo Maia, Ian Germoglio, Kildembergue Kaynan, Lucas Giovanni, Pedro Siqueira, Raimundo Neto, que foram verdadeiros irmãos e me ajudaram em tudo que precisei nesse trabalho e em todo o período da graduação.

Aos meus amigos, Ewerton Andrade, Victor Mota, Chiara Teodoro, Lisarb Brasil, Lays Raianne, que me ajudaram de várias formas para o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus amigos e colegas de curso que sempre auxiliaram nas disciplinas do curso.

Aos técnicos e funcionários do laboratório, por toda ajuda na realização dos ensaios para este trabalho.

À coordenadora do curso Ana Claudia por seu auxílio e dedicação para o melhoramento do curso e situação dos estudantes.

Aos professores do departamento de Engenharia Civil por toda dedicação empregada para passar seus conhecimentos para os alunos.

RESUMO

VERÍSSIMO, João. P. S. *Efeitos da Protensão na Frequência Natural de Vigas de Concreto*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.

O desenvolvimento das pesquisas relacionadas à dinâmica das estruturas deixou de ser motivado apenas pela necessidade de entender o comportamento das construções em relação às ações sísmicas. Isso ocorre devido ao avanço dos materiais e das tecnologias utilizadas nas obras, possibilitando a construção de edificações maiores, mais complexas e esbeltas, que conseqüentemente precisam de uma maior análise no seu funcionamento estrutural. Para atender essa necessidade, o estudo da dinâmica das estruturas é uma ferramenta bastante útil e precisa. Ainda no contexto de modernização da construção, a técnica de protensão de estruturas se tornou uma tecnologia eficaz e bastante utilizada para proporcionar soluções estruturais ousadas, pois oferece uma boa relação custo-benefício nesses casos. Para que essas estruturas funcionem da forma esperada e não apresentem patologias, é necessário que suas características dinâmicas sejam estudadas. O presente trabalho apresenta um estudo sobre os efeitos que a protensão pode causar em uma viga de concreto, principalmente no que diz respeito à sua frequência de vibração natural. Para isso, foi realizado o estudo comparativo de modelos analíticos e experimentais de uma viga. O resultado dessa comparação foi que o método analítico produz resultados coerentes com o observado experimentalmente, desde que seja possível quantificar precisamente a rigidez da estrutura. Ainda, foi notado que a carga de protensão aplicada não foi suficiente para aumentar a rigidez do elemento e conseqüentemente não alterou a sua frequência natural. Além disso, foi analisada a influência da protensão como reforço estrutural.

Palavras-chave: frequência natural, protensão, dinâmica, concreto, estrutura.

ABSTRACT

VERÍSSIMO, João. P. S. *Prestress Force Effect on Natural Frequency of Concrete Beams*. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2018.

The development of researches related to Structural Dynamics is no longer motivated just to understand the behavior of buildings in relation to seismic actions. This fact happened because there was an advance of materials and technologies used in the constructions, which allowed the construction of larger, more complex and slender edifications, that consequently needs a better knowledge of their structural functioning. To solve this requisite, the study of Structural Dynamics is a very useful and precise tool. Still, in the context of Civil Engineering modernization, the prestressing technique on structures has become an effective and useful technology to provide structural solutions, because it offers a good cost-benefit ratio. For these structures to function as expected and do not present pathologies, it is necessary to study their dynamic characteristics. This paper presents a study about the effects that the prestress force can cause in a concrete beam, mainly on natural vibration frequency. For this, it was carried out an analytical and experimental comparative study of a beam model. This comparison shows the analytical method produces consistent results with that observed experimentally, provided that is possible to quantify the stiffness of structure. It was also noted that the prestress force wasn't sufficient to increase the stiffness of the element and consequently did not alter their natural frequency. In addition, the influence of the prestress technique as structural reinforcement was analyzed.

Key words: natural frequency, prestress force, dynamic, concrete, structure.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ponte Tacoma Narrows “galopando” sob a ação do vento.	16
Figura 2 - Primeiro (a) e segundo (b) modo de vibração.....	21
Figura 3 - Tabela 23.1– Frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas.....	23
Figura 4 - Cimento CII-Z 32 utilizado no concreto.....	30
Figura 5 - Agregado miúdo (a) e graúdo (b) utilizados no concreto.	30
Figura 6 - Corpos de prova cilíndricos moldados em fôrmas metálicas.	31
Figura 7 - Corpos de prova no processo de cura em solução saturada de hidróxido de cálcio.....	31
Figura 8 - Corpos de prova desformados antes de ir para o processo de cura.....	31
Figura 9 - Ensaio não destrutivo no equipamento Sonelastic®	33
Figura 10 - Itens componentes do Sonelastic® para o ensaio com CPs.....	33
Figura 11 - Ensaio de resistência à compressão com 7 (a) e 28 (b) dias.	33
Figura 12 - Madeirite plastificado utilizado para fabricação da fôrma da viga.....	34
Figura 13 - Fôrma da viga com dimensões de 0,14m x 0,30m x 3,20m.	34
Figura 14 - Desmoldante utilizado na fôrma da viga.	35
Figura 15 - Carregamentos utilizados para o dimensionamento da viga.....	35
Figura 16 - Detalhamento da armadura passiva.	36
Figura 17 - Imagem de espaçador semelhante ao utilizado na viga.	36
Figura 18 - Viga com superfície molhada durante o processo de cura.....	37
Figura 19 - Viga após retirada das fôrmas.....	38
Figura 20 - Viga posicionada sobre os apoios rotulados e pintada com cal.....	38

Figura 21 - Peças utilizadas no sistema de protensão.....	Erro! Indicador não definido.
Figura 22 - Sistema de protensão da viga desenvolvido para esse experimento.....	39
Figura 23 - Fluxograma dos ensaios realizados na viga de concreto.	40
Figura 24 - <i>Software</i> do Sonelastic®	41
Figura 25 - Captador acústico do Sonelastic®	41
Figura 26 - Esquema do ensaio dinâmico com Sonelastic® para viga íntegra.	42
Figura 27 - Viga de concreto armado durante o ensaio de flexão por 4 pontos.....	42
Figura 28 - Relógio comparador utilizado para medir deslocamento vertical da viga.....	43
Figura 29 - Fissuras marcadas na viga durante o ensaio de flexão por 4 pontos.....	43
Figura 30 - Viga fissurada após o ensaio de flexão por 4 pontos.....	43
Figura 31 - Esquema do ensaio dinâmico com Sonelastic® para viga fissurada.....	44
Figura 32 - Viga após a aplicação da protensão.	44
Figura 33 - Esquema do ensaio dinâmico com Sonelastic® para viga protendida.	45
Figura 34 - Resultados do ensaio de granulometria do agregado miúdo. Erro! Indicador não definido.	
Figura 35 – Gráfico do ensaio de granulometria do agregado miúdo.	46
Figura 36 - Gráfico da frequência natural da viga íntegra capturada no ensaio com o Sonelastic®.	49
Figura 37 - Gráfico da frequência natural da viga fissurada capturada no ensaio com o Sonelastic®.....	49
Figura 38 -Gráfico da frequência natural da viga protendida capturada no ensaio com o Sonelastic®.....	50

Figura 39 - Força axial de protensão necessária para provocar o deslocamento medido (F_{tool}).	54
Figura 40 - Deslocamento provocado pela força de protensão (F_{tool}).	54
Figura 41 - Força axial aplicada na viga.....	55

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resumo de dados dos corpos de prova de concreto simples.....	32
Tabela 2 - Traço e Quantidade de materiais utilizados.	37
Tabela 3 - Módulo de Elasticidade Dinâmica do CPs.....	47
Tabela 4 - Resultado do ensaio à compressão.	47
Tabela 5 – Frequência natural calculada de acordo com os modos de vibrar, nos estados íntegro, fissurado e protendido da viga.....	48
Tabela 6 – Picos de frequência destacados no espectro.	48
Tabela 7 - Resultados de frequência natural selecionados para serem analisados e comparados.	50
Tabela 8 - Comparação da frequência calculada e encontrada experimentalmente para viga íntegra.	51
Tabela 9 – Comparação da frequência calculada e encontrada experimentalmente para viga fissurada.....	51
Tabela 10 - Comparação da frequência calculada e encontrada experimentalmente para viga protendida.	52
Tabela 11 - Deslocamentos verticais no ensaio de flexão por 4 pontos para situação sem e com protensão.....	53
Tabela 12 - Deslocamento vertical da viga devido à protensão da estrutura.	54

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ASTM	<i>American Society for Testing and Materials</i>
CP (s)	Corpos de Provas
CPII Z	Cimento Portland Composto com Pozolana
E	Módulo de elasticidade
ELU	Estado Limite Último
fck	<i>Feature Compression Know</i>
g	Gravidade
GPa	Gigapascal
Hz	Hertz
I	Momento de inércia da seção
kN	Kilonewton
L	Comprimento da Viga
LABEME	Laboratório de Ensaios de Materiais e Estruturas
m	Massa da viga por unidade de comprimento
MPa	Megapascal
n	Número do Modo de Vibração
N	Força Axial de Compressão
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
NBR	Norma Brasileira
RB	Relaxação Baixa
RN	Relaxação Normal
TUM	Traço Unitário em Massa
UFPB	Universidade Federal da Paraíba

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Contexto e motivação	15
1.2	Objetivo	17
1.3	Metodologia do trabalho	18
1.4	Estrutura do trabalho.....	18
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	20
2.1	Frequência Natural e Modos de Vibração das Estruturas.....	20
2.2	Efeitos da Protensão na Frequência Natural das Estruturas de Concreto	25
3	METODOLOGIA - FASE EXPERIMENTAL	29
3.1	Primeira Parte – Ensaios de Caracterização.....	29
3.2	Segunda Parte – Execução e ensaios da viga de concreto	34
3.2.1	Ensaios realizados na viga.....	40
4	RESULTADOS E ANÁLISES	46
4.1	Resultado da caracterização do agregado miúdo e dos corpos de prova	46
4.1.1	Ensaios de granulometria do agregado miúdo.....	46
4.1.2	Ensaios dinâmico nos corpos de prova.....	47
4.1.3	Ensaios de resistência à compressão	47
4.2	Resultado e análise dos ensaios na viga de concreto	48
4.2.1	Ensaios dinâmicos na viga de concreto	48
4.2.2	Ensaio de flexão por 4 pontos na viga de concreto	52
4.2.3	Protensão da viga de concreto	53
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	56
5.1	Conclusão.....	56
5.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	56

REFERÊNCIAS	57
ANEXO.....	60
Anexo I: Dimensionamento da armadura passiva da viga de concreto	60
Anexo II: Cálculo da frequência natural da viga nas situações íntegra, fissurada e protendida	
63	

1 INTRODUÇÃO

1.1 Contexto e motivação

É indiscutível a importância da Engenharia Civil no desenvolvimento das sociedades, pois praticamente toda infraestrutura necessária para a existência da população surge a partir da Construção. Além disso, muitos empregos e renda são gerados a partir destas. Entre 2004 e 2013 a construção civil cresceu de forma desenfreada no Brasil, fato esse muito importante para o desenvolvimento do país, porém perigoso visto que vários problemas poderão surgir. Alguns destes já estão surgindo devido à uma falta de planejamento nas construções.

Devido a esses e outros fatores, vários pesquisadores dedicam boa parte dos seus estudos para encontrar soluções e tecnologias que melhorem cada vez mais esse ramo, a exemplo de pesquisas que exploram características estáticas e dinâmicas das edificações.

Em geral, os desenvolvimentos das pesquisas relacionadas à dinâmica das estruturas foram motivados, principalmente, pela necessidade de compreender o comportamento das construções em relação às ações sísmicas, que desde sempre, vem causando danos às estruturas de edifícios, pontes, barragens, etc. Com a construção de estruturas cada vez mais altas e com grande esbeltez, se fazem necessários os estudos sobre a temática, de modo que seja possível conhecer melhor o comportamento dinâmico das estruturas. Um exemplo clássico é apresentado na Figura 1, a ponte suspensa de *Tacoma Narrows*, conhecida como a “Ponte que Galopava”, colapsou no dia 07 de novembro de 1940, apenas quatro meses após sua inauguração, devido às vibrações do tabuleiro que foram induzidas por uma forte tempestade de vento (LAROCCA, 2004).

Figura 1 – Ponte Tacoma Narrows “galopando” sob a ação do vento.



Fonte: Internet¹ (2018).

Tratando-se especificamente sobre o Concreto Protendido, este remonta 1886, quando a primeira proposta de protender uma peça de concreto foi idealizada pelo engenheiro norte-americano P. H. Jackson, e consistia em construir vigas e arcos a partir da união de blocos individuais, utilizando um tirante desenvolvido por este (AGOSTINI, 1983).

Atualmente o Concreto Protendido se apresenta na construção civil como uma tecnologia inteligente, eficaz, duradoura e já consolidada, pois é capaz de oferecer ótimas relações custo-benefício. Tal tecnologia confere ao concreto uma maior resistência à tração, sendo bastante interessante em estruturas onde existem esforços de flexão elevados. Os benefícios da protensão permitiram o avanço das construções e a realização de projetos cada vez mais complexos e arrojados. As obras que utilizam a tecnologia do concreto protendido normalmente são bastante grandes e complexas, portanto entende-se que é necessário cada vez mais aumentar o conhecimento a respeito da dinâmica dessas estruturas com o objetivo de evitar futuras patologias.

De acordo com Moreira (2002), nota-se, ao longo das últimas décadas, uma crescente preocupação de pesquisadores no tocante a identificação e compreensão de comportamentos

¹ Fonte: <https://www.engineergirl.org/File.aspx?id=4261&v=86a839c8>

estruturais com respeito as solicitações estáticas e dinâmicas. As análises visam tanto o ponto de vista de danos estruturais quanto de desconforto humano.

A maioria das análises feitas em elementos de concreto são de cunho estático ou estática equivalente a dinâmica, a exemplo dos coeficientes de impacto no dimensionamento de pontes. Mendes (2012) expõe que, na maioria das estruturas de Engenharia Civil, a análise estática é suficiente para caracterizar e interpretar o seu comportamento estrutural. Porém, o avanço na construção, a utilização de materiais novos e a adoção de soluções estruturais cada vez mais ousadas obriga um maior conhecimento do funcionamento estrutural desses elementos. Portanto, a dinâmica de estruturas se torna uma ferramenta extremamente útil para elaboração de modelos mais precisos e faz com que seja possível uma análise do comportamento estrutural mais detalhada.

Portanto, essa realidade motiva o desenvolvimento de estudos que busquem ampliar o conhecimento na área da dinâmica das estruturas e conseqüentemente proporcionar um desenvolvimento cada vez maior dos projetos e das construções, sem que haja problemas.

1.2 Objetivo

O objetivo desse trabalho de conclusão de curso é identificar e analisar os efeitos dinâmicos na frequência natural de vigas de concreto quando submetidas à protensão externa. Para tanto os seguintes objetivos específicos foram estabelecidos.

- Estudar analiticamente as formulações para a determinação da frequência natural de vigas com e sem protensão;
- Confeccionar, ensaiar e analisar os resultados de um protótipo experimental de viga de concreto armado com protensão externa;
- Comparar os resultados de frequência natural obtidos de forma analítica e experimental, a fim de saber se os resultados analíticos são precisos quanto à realidade experimentada.
- Observar o efeito da protensão externa como ferramenta de reforço estrutural.

1.3 Metodologia do trabalho

Para alcançar os objetivos enunciados, primeiramente será estudada a maneira analítica de calcular a frequência natural de uma viga de concreto, semelhante a que será ensaiada na fase experimental, para as situações íntegra, fissurada e protendida. Será apresentado um roteiro de cálculo utilizado para determinar as frequências naturais para seus 9 primeiros modos de vibração.

Na fase experimental será ensaiada, dinamicamente e estaticamente, uma viga de concreto armado a fim de obter a frequência natural da estrutura para os estados íntegro, fissurado e protendido.

Serão analisados e comparados os resultados de frequência natural obtidos das duas formas com o objetivo de verificar a precisão do método analítico quanto ao encontrado experimentalmente.

Por último, serão analisados os efeitos da protensão no reforço da estrutura.

1.4 Estrutura do trabalho

Esse trabalho é dividido em 5 capítulos. Inicialmente, neste capítulo 1 fez-se algumas considerações iniciais a respeito da tecnologia de protensão que provoca uma modernização das construções e gera a necessidade da análise dinâmica dessas estruturas. Além disso, apresentou-se a problemática desse tema, justificando a importância do estudo. Ainda, foram apresentados os objetivos deste trabalho, sua estrutura e a metodologia utilizada.

O capítulo 2 constitui uma breve fundamentação teórica, em que são abordados conceitos para um maior entendimento da frequência natural das estruturas e quais problemas podem surgir nestas, caso essa característica esteja fora dos padrões aceitáveis. Ainda, é apresentado como a protensão das estruturas pode interferir na sua frequência natural.

O capítulo 3 foi dividido em duas partes. A primeira descreve o processo de caracterização do concreto e seus componentes, que serão usados na parte seguinte. A segunda parte descreve os procedimentos experimentais necessário para identificação dos efeitos da protensão na frequência natural de uma viga de concreto.

O capítulo 4 expõe e analisa os resultados obtidos durante os ensaios realizados.

Finalmente, no capítulo 5, apresentam-se as considerações finais que são compostas pelas conclusões em relação ao tema abordado, e sugestões para trabalhos futuros.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 Frequência Natural e Modos de Vibração das Estruturas

É impossível falar em dinâmica das estruturas e não falar sobre o conceito de vibração. Segundo Blessmann (2005, p 13), vibração é o movimento que ocorre em todo o corpo que possui massa e elasticidade e se repete a cada intervalo definido de tempo, apresentando características específicas como deslocamento e período.

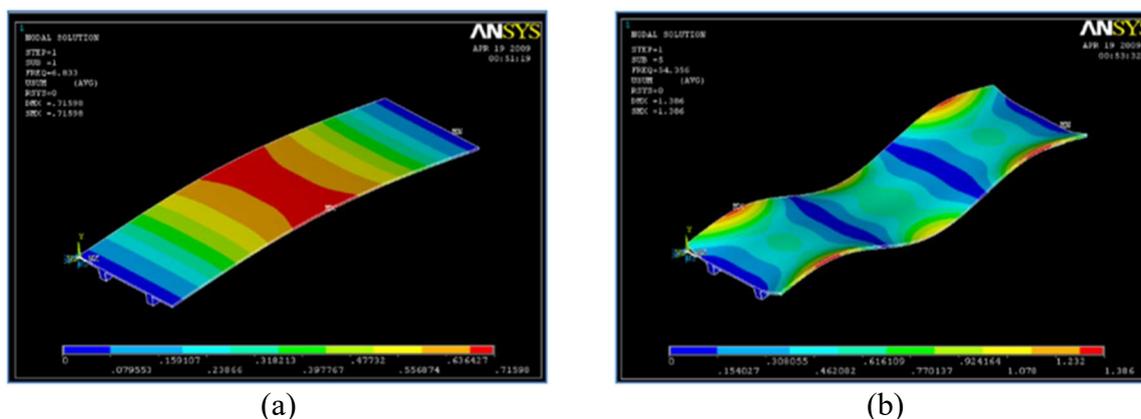
De acordo com Hibbeler (2005, p 504), em geral há dois tipos de vibração, livre e forçada. A vibração livre ocorre quando o movimento é mantido por forças restauradoras gravitacionais ou elásticas, como o movimento de oscilação de um pêndulo ou a vibração de uma barra elástica. A vibração forçada é causada por uma força intermitente ou periódica externa aplicada ao sistema.

Nesse trabalho o tipo de vibração estudado será a vibração livre e suas características. As pesquisas na área da dinâmica das estruturas sempre têm o foco no estudo do comportamento de uma ou mais das principais características dinâmicas de um elemento, que são a frequência natural, modo de vibração e amortecimento. Mesmo que todas não sejam estudadas a fundo na mesma pesquisa, é necessário entender seus conceitos, como cada um desses parâmetros se comporta individualmente e como estão interligados.

O primeiro conceito abordado é o de frequência natural, pois é o foco dessa pesquisa. Almeida (2005) relata que, a frequência natural é o parâmetro modal mais importante da estrutura e representa a taxa de oscilação livre, depois de cessada a força que provocou o seu movimento. Como ela depende, exclusivamente, da massa e da rigidez do sistema (elemento estrutural), qualquer modificação nessas propriedades altera o valor da frequência natural, que também é conhecida como frequência de ressonância.

Além do conceito de frequência natural outra importante definição que deve ser entendida para compreender melhor como funciona a dinâmica das estruturas é o de modo de vibração (Figura 2). Diógenes (2010) descreve que, o modo de vibração corresponde ao perfil vibracional associado a cada frequência natural. No que se refere ao concreto, os modos de vibração podem sofrer grande influência da fissuração, principalmente quando a região fissurada está localizada numa região de maior amplitude do modo correspondente.

Figura 2 - Primeiro (a) e segundo (b) modo de vibração.



Fonte: Diógenes (2010).

A frequência natural do primeiro modo de vibração é chamada de frequência fundamental. Como esta frequência apresenta o menor valor dentre todas as frequências, normalmente é a que pode acarretar problemas para as estruturas civis (ALMEIDA, 2005).

Além de poder causar problemas para as estruturas essa baixa frequência do elemento pode aproximar-se da frequência limite que se torna perceptível pelo corpo humano e consequentemente causar algum incômodo. Moreira (2002) conta que, os efeitos sobre a pessoa são aqueles de incômodo, apreensão quanto à segurança estrutural do edifício, perda de concentração mental, e ocasionalmente, sensações de indisposição semelhantes ao enjoo.

A incomodidade humana perante determinado fenômeno vibratório consiste em algo difícil de quantificar e que traduz a reação do desconforto que a maioria das pessoas experimenta tal estímulo. Não devem ser confundidos os conceitos de “incomodidade” e de “percepção”, dado que este último possui geralmente valores mais baixos que o primeiro, embora a repetição de eventos simples perceptíveis possa conduzir à incomodidade (GAMA; PANEIRO, 2006).

Outros dois conceitos da dinâmica que estão estritamente ligados e que devem ser entendidos são os de amortecimento e de ressonância. O amortecimento, ou atrito interno, é uma das propriedades mais sensíveis de materiais e estruturas, tanto em escala macro quanto microscópica, sendo particularmente sensível à presença de trincas e micro-trincas. É o fenômeno pelo qual a energia mecânica de um sistema é dissipada, principalmente pela geração de calor e/ou energia. Além da aplicação clássica no estudo de metais e em engenharia civil (devido à importância do amortecimento para a integridade de estruturas no caso de abalos sísmicos), a

caracterização do amortecimento também vem sendo empregada no estudo de concretos para a avaliação do dano. (COSSOLINO; PEREIRA, 2010).

Segundo Blessmann (2005), em estruturas monolíticas, como as de aço soldadas ou de concreto armado, a parcela dominante do amortecimento é o amortecimento intrínseco do material, que faz parte do amortecimento estrutural.

De acordo com Almeida (2005), o amortecimento influencia a amplitude da vibração e o tempo de duração do movimento, depois de cessada a excitação correspondente. É definido como a propriedade interna de dissipar energia pelo processo viscoso e atrito do sistema. O mesmo autor relata ainda que, no caso de estruturas civis, quando ocorre ressonância, pequenos esforços externos provocam deslocamentos significativos, tornando o movimento perceptível e provocando incômodos aos usuários. Uma maneira de prevenir a ampliação excessiva da vibração é projetando a estrutura de forma que a frequência natural obtida seja mais alta que a frequência das prováveis forças de excitação. Esse incremento está relacionado com o amortecimento da estrutura. Quanto maior o amortecimento ou a frequência natural, mais afastada estará da estrutura.

Moreira (2002) também escreve sobre a ressonância nas estruturas e expõe que, uma condição básica para ocorrência de problemas de vibrações estruturais se deve à superposição das faixas de frequência da excitação com as frequências naturais da estrutura. Projetos arquitetônicos mais esbeltos, arrojados e com estrutura pouco travejadas, tornam as edificações mais flexíveis, com baixa frequências fundamentais de vibração (0-10 Hz) e, portanto, na maioria dos casos susceptíveis a excitações devidas a várias fontes também de baixa frequência, comumente encontradas em regiões urbanas.

A ABNT NBR 6118:2014, no item 23.3, expõe que para assegurar comportamento satisfatório das estruturas sujeitas a vibrações, deve-se afastar o máximo possível a frequência própria da estrutura (f) da frequência crítica (f_{crit}), que depende da destinação da respectiva edificação. A condição abaixo deve ser satisfeita:

Na falta de valores determinados experimentalmente, podem ser adotados os valores indicados na Tabela 23.1 (Figura 3) para f_{crit} .

$$f > 1,2f_{crit}$$

Figura 3 - Tabela 23.1– Frequência crítica para vibrações verticais para alguns casos especiais de estruturas submetidas a vibrações pela ação de pessoas.

Caso	f_{crit} Hz
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,0
Passarelas de pedestres ou ciclistas	4,5
Escritórios	4,0
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,5

Fonte: ABNT NBR 6118 (2014).

A grande maioria das estruturas está susceptível à problemas devido às ações dinâmicas, porém algumas apresentam uma vulnerabilidade maior, podendo ser sensíveis até mesmo ao ato de caminhar do ser humano.

A ação dinâmica, ao caminhar, é atribuída a cada passo que uma pessoa realiza. Testes indicam uma média, para cálculos, de cerca de 2 passos por segundo, mas uma faixa entre 1,6 a 2,4 Hz pode ser considerada (MOREIRA, 2002).

Moreira (2002) relata ainda que, do ponto de vista estrutural, há estruturas que são vulneráveis a estas ações dinâmicas especialmente aquelas em que a frequência natural esteja entre 4 e 6 Hz, como é o caso das lajes em edifícios que têm grandes vãos. Experiências tem mostrado que estruturas com laje de concreto e vigas de aço, cuja primeira frequência natural é menor ou igual a 7 ou 8 Hz, são susceptíveis ao desconforto causado por vibrações induzidas pela ação do caminhar. Estas vibrações são ainda mais intensas do que nos pavimentos construídos com vigas e laje ambos de concreto e que tenha a primeira frequência natural também menor ou igual a 7 ou 8 Hz.

O aumento gradual do carregamento e a evolução da fissuração, existe uma diminuição da frequência natural e um aumento no amortecimento. Essa variação dos parâmetros permite obter os valores de rigidez equivalente para os diversos estágios de fissuração da peça, o que talvez possa indicar a proximidade da ruptura (ALMEIDA, 2005).

Segundo Maas *et al*². (2012, *apud* MOREIRA, 2014), a frequência natural de um dado sistema é uma propriedade constante e invariante, na qual, ao se iniciar a fissuração do material as frequências naturais do sistema são alteradas em decorrência da redução da rigidez. Os autores afirmam que este é um efeito bastante conhecido e utilizado como indicador de dano da estrutura, entretanto só é eficiente após o surgimento das primeiras fissuras.

Diante de todas essas informações entende-se que o estudo da frequência natural de um elemento estrutural é extremamente importante e deve ser feito em todas as situações, pois problemas gerados a partir de uma falta de verificação das características dinâmicas podem provocar desconforto para quem utiliza essas estruturas e até leva-la ao colapso. Com a assimilação desses conceitos é possível entender mais quais as variáveis e como elas influenciam nesse sistema dinâmico, podendo gerar problemas.

A frequência é inversamente proporcional à massa, e diretamente proporcional à rigidez. Ou seja, influencia nesta parcela o comprimento do vão do elemento, o seu módulo de elasticidade (propriedade do material), a sua inércia (propriedade geométrica) e as condições de vínculo (ALMEIDA, 2005).

Um grande problema em estruturas de concreto é o aparecimento de fissuras. Muitas vezes os projetos de estruturas de concreto são calculados apenas para que sejam resistentes aos esforços solicitantes, porém não atendem aos estados limites de fissuração e de abertura de fissura e conseqüentemente essas patologias aparecem após a construção. Diógenes (2010) expõe que, um bom exemplo da dependência da frequência natural é a fissuração do concreto, pois com a evolução da formação das fissuras e aumento de suas aberturas, existe uma diminuição da rigidez e, conseqüentemente, ocorre uma redução no valor da frequência natural.

Os problemas relacionados à frequência natural das estruturas também podem estar vinculados à estímulos externos, como por exemplo os carregamentos que são aplicados sobre a estrutura e podem influenciar no seu desempenho. Moreira (2002) escreve que, dentre as ações dinâmicas sobre edifícios residenciais e comerciais urbanos, talvez a mais comum seja aquela

² MAAS, S. et al. (2012). Damage assessment of concrete structures through dynamics testing methods. Part 1 – Laboratory tests. **Engineering Structures**, v.34, p.351-362, 2012.

produzida por pessoas em atividades normais sobre as lajes de piso nos edifícios residenciais ou comerciais. Tornam-se ainda mais relevantes quando as ações são de pulo, corrida ou dança.

Sobremaneira, nestes três últimos, alguns fatores podem intensificar tais ações, como por exemplo, configuração das repartições, mobílias, cargas concentradas, forma geométrica das áreas das lajes, etc. Essas ações são mais intensas ainda na medida em que deixam de ser causadas por uma pessoa apenas e passam a ter origem em grupos de pessoas que praticam movimentos sincronizados e com ações localizadas. É sabido que todos estes fatores são capazes de afetar não somente a forma modal e a frequência natural das lajes, mas como também o seu amortecimento. Como se pode notar a observação e os cálculos racionais para as amplitudes de vibração induzidas por estas forças dinâmicas são, por vezes, tarefas complicadas (MOREIRA, 2002).

Os estudos da frequência natural dos elementos têm um grande ponto ao seu favor que é a facilidade de ser medida. Segundo Salawu³ (1999, *apud* ALMEIDA, 2005), uma das vantagens de medir as respostas da vibração com métodos que empregam a frequência natural é a sua natureza global, o que permite a escolha dos pontos de medição que melhor se adaptem às condições do ensaio.

Outro ponto que é muito interessante nos ensaios dinâmicos é que eles são não destrutivos, portanto são bastante viáveis nas manutenções das estruturas. Saiidi *et al.* (1994), discorre que os métodos não destrutivos para determinar a condição de uma ponte existente são usados para a manutenção preventiva, reparos, ou substituição da estrutura.

2.2 Efeitos da Protensão na Frequência Natural das Estruturas de Concreto

A ABNT NBR 6118:2014 é o documento responsável pelos normativos referentes às estruturas de concreto. Segundo esse documento, os elementos de concreto protendido são aqueles nos quais parte das armaduras é previamente alongada por equipamentos especiais de protensão, com a finalidade de, em condições de serviço, impedir ou limitar a fissuração e os

³ SALAWU, O. S. (1997). Detection of structural damage through changes in frequency: a review. **Engineering Structures**, v.19, n.9, p. 718-723.

deslocamentos da estrutura, bem como propiciar o melhor aproveitamento de aços de alta resistência no estado-limite último (ELU).

San Martins (2014) expõe que, no caso do concreto, a protensão pode ser justificada para criar tensões de compressão prévias em uma estrutura nos locais onde surgiriam esforços de tração por consequência da ação dos carregamentos. Alguns elementos de concreto armado são fabricados em peças que quando justapostas com outras podem viabilizar a construção de estruturas pré-moldadas protendidas.

Segundo Carvalho (2012), as estruturas executadas em concreto protendido recebem em geral três tipos de classificação considerando os mecanismos de aderência entre a armadura de protensão e o concreto:

- Com aderência inicial ou pré-tracionadas – a aderência entre a armadura e o concreto é iniciada quando se inicia o lançamento do concreto;
- Com aderência posterior ou pós-tração com aderência – a aderência entre a armadura e o concreto é iniciada posteriormente à execução da protensão, quando o concreto já está endurecido e injeta-se nata de cimento na bainha que isola a armadura de protensão e o concreto;
- Sem aderência ou pós-tração sem aderência – neste caso a armadura só estará solidaria ao concreto na região das (e através das) ancoragens;

Carvalho (2012) ainda indica que o concreto empregado nas estruturas protendidas requer um controle mais rigoroso em relação ao utilizado no concreto armado. Em geral a resistência característica à compressão, f_{ck} , é superior àquelas das peças de concreto armado. Essa resistência elevada se justifica principalmente devido às solicitações prévias que a força de protensão pode causar nas peças e pelo fato do módulo de deformação de concretos de alta resistência ser superior, o que diminui as deformações imediatas e as que ocorrem ao longo do tempo. Além da elevada resistência, o concreto deve ser compacto e ter baixa permeabilidade para proteção da corrosão dos aços de protensão.

De maneira geral, o concreto utilizado deve ter melhores características tanto no que se refere às propriedades mecânicas como no que se refere à durabilidade. Da mesma forma algumas características são necessárias nos aços de protensão (armadura ativa) como elevada resistência e ausência do patamar de escoamento. São sensivelmente mais econômicos que os aços empregados como armadura passiva e podem ser fornecidos em forma de fios, cordoalhas ou

barras de aço-liga. Quanto às modalidades de tratamento são divididas em aços de relaxação normal (RN) ou relaxação baixa (RB). O fator preocupante no caso do aço de protensão está na corrosão. Quando é submetido a tensões elevadas, se torna mais suscetível à corrosão e pode romper com facilidade.

Além da protensão interna, que é mais difundida, existe a possibilidade de fazê-la externa a estrutura. Diógenes (2010) indica que nos últimos anos o interesse pela manutenção, reabilitação e reforço de pontes tem aumentado consideravelmente. A técnica de reforço de vigas pontes com o uso de protensão por meio de cabos externos tem sido estudada como um meio possível de reforço.

Diógenes (2010) revela ainda que a utilização de protensão externa acarretava em muitas vantagens do ponto de vista estático. Entretanto, como já delineado, em teoria, carregamentos axiais de compressão em vigas tendem a diminuir sua frequência natural. Por esta razão se faz necessário uma avaliação de características vibracionais de vigas reforçadas com protensão externa.

Sobre a diminuição da frequência natural com a protensão, Shaker⁴ (1975, *apud* DIÓGENES, 2010) apresentou um trabalho tratando especificamente dos efeitos de cargas axiais nos modos de vibrar e frequências naturais de vigas, por meio de uma notificação técnica da NASA (Agência Espacial Norte Americana). Ele propôs uma investigação acerca do efeito do carregamento axial, para várias condições de vinculações. O resultado do seu trabalho foi a apresentação das formulações para determinação da frequência natural de vigas submetidas a carregamento axial para várias condições de vinculação. Concluindo que uma viga uniforme, quando submetida a um carregamento axial de compressão, tem sua frequência natural diminuída e do contrário, quando submetida à tração, tem sua frequência natural elevada.

Esse fato também foi percebido pelo pesquisador Blevins (1979) que afirma que, quando uma força axial de tração é aplicada a uma viga, esta tende a ter suas frequências naturais aumentadas. Ao contrário, uma axial de compressão tende a diminuir as frequências naturais.

⁴ SHAKER, F. J. (1975). **Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams**. Lewis Research Center. Report NASA-TN-8109, December 1975.

Ainda sobre este aspecto, cabe ressaltar que os autores Shaker⁵ (1975, *apud* DIÓGENES, 2010) e Blevins (1979), consideraram em suas análises materiais, homogêneos, isotrópicos e lineares.

Tratando-se do efeito da protensão em estruturas de concreto, Saiidi *et al.* (1994) realizaram uma pesquisa sobre a influência da protensão na frequência natural em elementos de concreto, na qual apresentou estudo de uma estrutura real e de um modelo reduzido em laboratório realizando ensaios não destrutivos. Além disso, também foi analisada a viabilidade de estimar as perdas da força de protensão da peça a partir variação da frequência natural do elemento.

Para Saiidi *et al.* (1994) a solução da equação de equilíbrio dinâmico, de uma viga bi-apoiada após a aplicação das condições de contorno, resulta na Equação (1) para a frequência natural de vibração:

$$\omega_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 * \frac{N}{m} + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^4 * \frac{EI}{m} \quad (1)$$

Onde: n=número do modo de vibração; L=comprimento da viga; N=força axial de compressão; m=massa da viga por unidade de comprimento; E=modulo de elasticidade; I=momento de inércia da seção.

Saiidi *et al.* (1994) foi ainda mais específico e mostra de acordo com equações, que com o aumento no número do modo de vibração ocorre um decréscimo na probabilidade da frequência natural se alterar com a variação de carregamentos axiais. Portanto, somente as frequências do menor modo de vibração podem ser potencialmente usadas para detectar efeitos dos carregamentos axiais na rigidez.

⁵ SHAKER, F. J. (1975). **Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams**. Lewis Research Center. Report NASA-TN-8109, December 1975.

3 METODOLOGIA - FASE EXPERIMENTAL

A metodologia utilizada na fase experimental desse trabalho foi dividida em duas partes:

- Primeira parte: Nessa parte foram realizados ensaios para caracterização dos agregados e do concreto que serviram para moldagem de uma viga de concreto armado que seria objeto da segunda parte da fase experimental. Para caracterização do agregado miúdo foi feito o ensaio de granulometria e para a caracterização do concreto foram realizados ensaios em corpos de prova (CPs) cilíndricos de concreto simples com o objetivo de determinar módulo de elasticidade dinâmico, amortecimento e resistência à compressão desses elementos.
- Segunda parte: Nessa parte foram feitos ensaios em uma viga de concreto armado, utilizando o concreto caracterizado na primeira parte. Primeiramente, seria realizado o ensaio dinâmico com o equipamento Sonelastic[®], que tem o objetivo de determinar a frequência natural desse elemento. Posteriormente, a viga será ensaiada à flexão por 4 pontos até o ELU estimado, de modo a garantir o aparecimento de fissuras relevantes e um novo ensaio dinâmico será realizado. A seguir, a viga recebeu uma protensão externa e mais um ensaio dinâmico será realizado para determinar uma nova frequência natural que será comparada com os resultados anteriores. Por último, a viga protendida externamente será ensaiada à flexão novamente.

3.1 Primeira Parte – Ensaios de Caracterização

Nessa etapa foi realizada a caracterização do concreto utilizado para moldar os corpos de prova cilíndricos e a viga de concreto que é objeto da segunda parte da fase experimental. Nestes foram usados cimento, areia, brita e água. O cimento e os agregados foram adquiridos em fornecedores da região de João Pessoa-PB e a água foi obtida da rede de abastecimento local. O cimento utilizado foi o CPII-Z 32 (Figura 4), da empresa Elizabeth Cimentos, que é fabricado com adição de 6 a 14% de pozolana e pode conter adição de material carbonático (filer) no limite máximo de 10%. Essas adições proporcionam uma menor permeabilidade ao cimento. A norma brasileira que trata deste tipo de cimento é a ABNT NBR 16697:2018.

Figura 4 - Cimento CII-Z 32 utilizado no concreto.



Fonte: do Autor (2018).

Para compor o concreto foram adicionados a pasta de cimento agregado miúdo e graúdo (Figura 5), que foram adquiridos no comércio local de material de construção da cidade de João Pessoa – PB. O agregado miúdo utilizado foi a areia natural, que é comumente utilizada para produção de concreto. Para a caracterização desse material foi realizado o ensaio de granulometria, de acordo com a ABNT NBR NM 248:2003. O agregado graúdo utilizado para a produção do concreto foi brita granítica nº 1, com diâmetro máximo de 19 mm, que é o tipo mais comumente utilizado em concretos na região.

Figura 5 - Agregado miúdo (a) e graúdo (b) utilizados no concreto.



(a)



(b)

Fonte: do Autor (2018).

Desta forma de acordo com as recomendações da ABNT NBR 5738:2015 foram moldados seis corpos de prova cilíndricos (Figura 6), com 10cm x 20cm, utilizando um concreto, misturado em betoneira, com traço de 1:1,8:2:0,5 (cimento:areia:brita:água).

Após 24 horas da moldagem, os CPs foram desmoldados (Figura 8) e iniciou-se o processo de cura em solução saturada de hidróxido de cálcio (Figura 7), de acordo com as recomendações da mesma norma brasileira. A cura durou até as vésperas dos ensaios à compressão realizados com 7 dias e 28 dias.

Figura 6 - Corpos de prova cilíndricos moldados em fôrmas metálicas.



Fonte: do Autor (2018).

Figura 7 - Corpos de prova no processo de cura em solução saturada de hidróxido de cálcio.



Fonte: do Autor (2018).

Figura 8 - Corpos de prova desformados antes de ir para o processo de cura.



Fonte: do Autor (2018).

A Tabela 1 mostra um resumo de todos os dados dos corpos de provas moldados.

Tabela 1 - Resumo de dados dos corpos de prova de concreto simples.

Quantidade de CPs	6 unidades
Forma dos CPs	Cilíndricos
Dimensões dos CPs	10cm x 20cm
Resistência prevista	15,58MPa (7dias) e 20MPa (28dias)
Traço	1: 1,8: 2: 0,5 - (Cimento: Areia: Brita: Água)
Materiais	Cimento CII-Z 32 Areia Média Brita 19 Água da rede de abastecimento
Equipamentos utilizados	Misturador planetário (betoneira)
Formas	Metálicas
Cura	Solução saturada de hidróxido de cálcio
Normas utilizadas	ABNT NBR 5738:2003 e ABNT NBR 5739:2018

Fonte: do Autor (2018).

O primeiro ensaio realizado nos corpos de prova para a caracterização do concreto foi não destrutivo (Figura 9) e permitiu aferir o módulo elástico dinâmico do concreto. Para isso, foi utilizado o equipamento Sonelastic[®].

O princípio do funcionamento do Sonelastic[®] é bastante simples. Cada material ao ser golpeado emite um som característico que depende das suas propriedades elásticas, dimensões e massa. O som emitido tem informações que permite determinar as propriedades elásticas do objeto. O Sonelastic[®] caracteriza qualquer material rígido com formatos regulares, que vão de vinte milímetros até três metros, de forma rápida, precisa e não destrutiva. Os dados podem ser exportados em vários formatos para outros *softwares*. As soluções do equipamento estão de acordo com as normas ASTM C215-14 e correlatas.

Os itens utilizados para esse ensaio das soluções Sonelastic[®] foram o *software* para computador, um suporte para o corpo de prova, um marteleto para provocar o impulso e um captador acústico que capta o som do objeto quando golpeado (Figura 10).

Figura 9 - Ensaio não destrutivo no equipamento Sonelastic®



Fonte: do Autor (2018).

Figura 10 - Itens componentes do Sonelastic® para o ensaio com CPs.



Fonte: do Autor (2018).

Continuando a caracterização do concreto foi feito ensaio de resistência à compressão (Figura 11), de acordo com a ABNT NBR 5739/2018. O ensaio foi realizado no Laboratório de Ensaio de Materiais e Estruturas (LABEME) da Universidade Federal da Paraíba (UFPB) numa prensa digital específica, fabricada pela CONTENCO – INDÚSTRIA E COMÉRCIO LTDA. Foram utilizados os mesmos corpos de prova da caracterização não destrutiva aos 7 e 28 dias.

Figura 11 - Ensaio de resistência à compressão com 7 (a) e 28 (b) dias.



(a)



(b)

Fonte: do Autor (2018).

3.2 Segunda Parte – Execução e ensaios da viga de concreto

Nessa etapa do trabalho foi moldada uma viga de concreto armado para ser objeto de ensaios estáticos e dinâmicos que ajudem a entender o efeito que a protensão dessa estrutura pode causar na frequência natural desse elemento. Para isso, a viga foi executada seguindo as diretrizes da ABNT NBR 14931:2004.

A fôrma da viga, com seção retangular e dimensões de 0,14m x 0,30m x 3,20m (Figura 13), foi produzida na oficina do LABEME na UFPB e para isso utilizou-se chapas de madeirite plastificado com 16 milímetros de espessura (Figura 12), adquiridas no comércio da região. Para que a fôrma não sofresse nenhum dano durante e após o período de concretagem, a mesma foi reforçada com pedaços do mesmo madeirite utilizado e com grampos de fixação do tipo C que a impediam de abrir.

Figura 12 - Madeirite plastificado utilizado para fabricação da fôrma da viga.



Fonte: do Autor (2018).

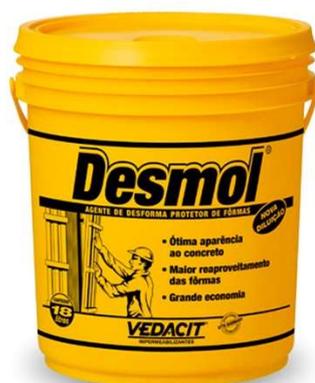
Figura 13 - Fôrma da viga com dimensões de 0,14m x 0,30m x 3,20m.



Fonte: do Autor (2018).

Ainda antes da concretagem, foi feita a aplicação de um desmoldante (Figura 14), seguindo as indicações do fabricante, no interior da fôrma para facilitar o processo desmoldagem e garantir que a viga não seria danificada nessa etapa.

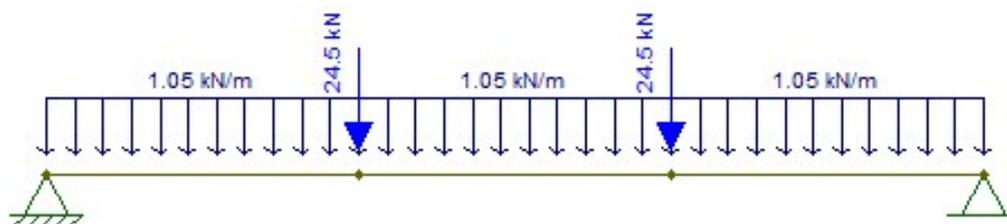
Figura 14 - Desmoldante utilizado na fôrma da viga.



Fonte: Internet⁶ (2018).

A viga tem uma seção retangular de 0,14m x 0,30m e um vão de 3,00 metros. Para obtenção de resultados expressivos, dimensionou-se o elemento para que suportasse, para além do seu peso próprio, uma carga de aproximadamente 5 toneladas (49kN) no ensaio de flexão por 4 pontos (Figura 15).

Figura 15 - Carregamentos utilizados para o dimensionamento da viga.



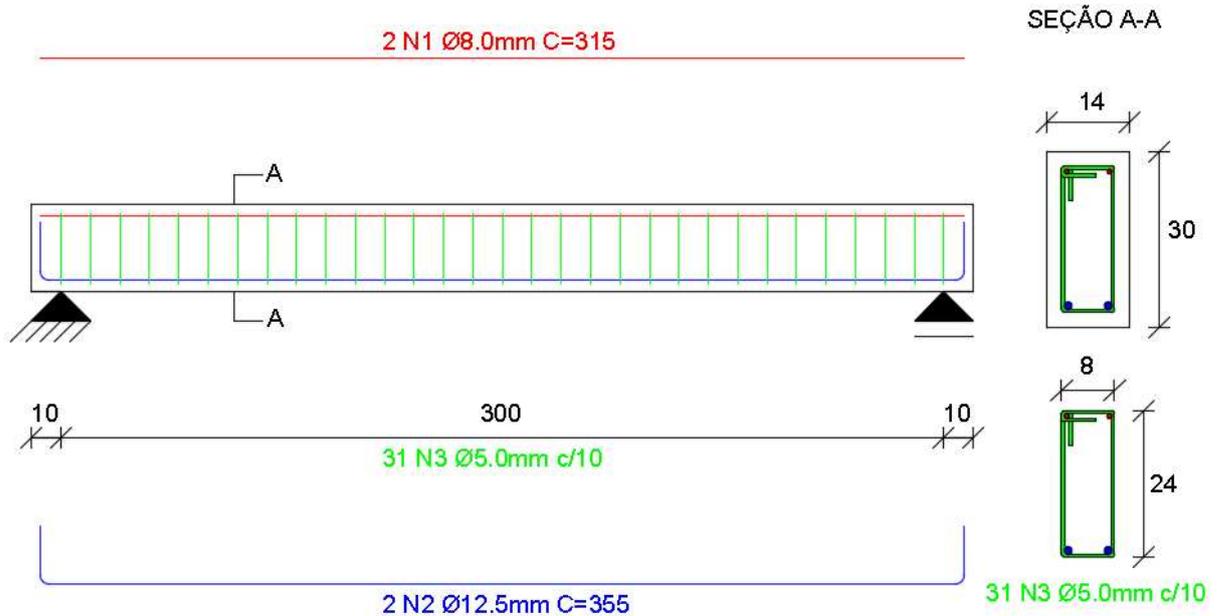
Fonte: do Autor (2018).

A armadura passiva da viga (Figura 16) foi calculada de acordo com as recomendações da ABNT NBR 6118:2014, desconsiderando os fatores de segurança por se tratar de um experimento. A armadura principal adotada foi de 2 barras de diâmetro 12,5mm no bordo inferior e no bordo superior foram colocadas 2 barras de diâmetro 8,0mm. A armadura transversal adotada foi composta de 30 estribos de 5,0mm espaçados de 10 centímetros entre eles (Apêndice A: Dimensionamento da armadura passiva da viga de concreto).

⁶ Fonte: <http://www.vedacit.com.br/produtos/desmol>

De acordo com o detalhamento exposto na Figura 16, a ferragem da armadura passiva foi adquirida cortada, dobrada e montada por um fornecedor de aço da cidade de João Pessoa-PB.

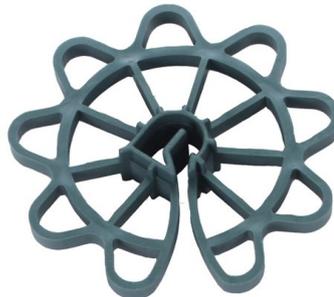
Figura 16 - Detalhamento da armadura passiva.



Fonte: do Autor (2018).

Antes da concretagem, foram colocados espaçadores plásticos (Figura 17) na armadura, a cada 50 centímetros, para centralizar a ferragem e atender os espaçamentos mínimos estipulados pela NBR 6118:2014.

Figura 17 - Imagem de espaçador semelhante ao utilizado na viga.



Fonte: Internet⁷ (2018).

⁷ Fonte: <http://www.periplasticos.com.br/site/espacadores-para-concreto.php>

O concreto utilizado para fazer a viga foi o mesmo caracterizado na primeira fase experimental. Na caracterização dos agregados foi constatado que a areia tinha 2% de umidade, portanto foi necessário fazer uma correção do traço para que as proporções corretas dos materiais fossem atendidas (Tabela 2).

Tabela 2 - Traço e Quantidade de materiais utilizados.

Traço	Cimento	Areia	Brita	Água/cimento
TUM	1	1,8	2	0,5
TUM corrigido	1	1,854	2	0,446
Material utilizado (Kg)	68,65	123,58	137,31	34,32
Material utilizado corrigido (Kg)	68,65	127,29	137,31	30,62

Fonte: do Autor (2018).

Com esses valores corrigidos, utilizou-se o misturador planetário para fazer o concreto, que depois foi transportado com carro de mão e colocado dentro da fôrma com ajuda de pá e colher de pedreiro. Em paralelo ao lançamento do concreto foi realizado seu adensamento com vibrador por imersão. Por último, foi feita a regularização da face superior da viga com a colher de pedreiro.

Após a concretagem a viga foi coberta com plástico para minimizar a perda de água nas primeiras 24 horas. Passado esse período inicial e com o concreto já endurecido, foi iniciado o processo de cura que consistia em manter molhada a face da viga que não estava em contato com as fôrmas e envolve-la com plástico para evitar ao máximo a perda de água (Figura 18). Esse processo foi repetido diariamente e durou 28 dias até que fossem retiradas as fôrmas.

Figura 18 - Viga com superfície molhada durante o processo de cura.



Fonte: do Autor (2018).

Passados 28 dias realizando a cura do concreto foram retiradas as fôrmas (Figura 19).

Figura 19 - Viga após retirada das fôrmas.



Fonte: do Autor (2018).

A viga foi posicionada sobre apoios rotulados (Figura 20) abaixo de pórtico de reação, o qual tinha fixado um atuador hidráulico. Antes dos ensaios realizou-se a pintura da viga com cal para facilitar a visualização e demarcação das fissuras.

Figura 20 - Viga posicionada sobre os apoios rotulados e pintada com cal.



Fonte: do Autor (2018).

Para a protensão da estrutura foi desenvolvido um sistema (

Figura 22) que usava chapas de aço de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ polegadas, dois vergalhões de aço de 10 milímetros roscados em uma das pontas, porcas de aço (**Erro! Fonte de referência não encontrada.**). O material utilizado no sistema de protensão foi comprado em fornecedores de aço da região de João Pessoa e montado na oficina do LABEME na UFPB. Com esse sistema foi possível a aplicação de força axial na viga à medida que as porcas eram apertadas na barra.

Figura 21 - Peças utilizadas no sistema de protensão.



Fonte: do Autor (2018).

Figura 22 - Sistema de protensão da viga desenvolvido para esse experimento.

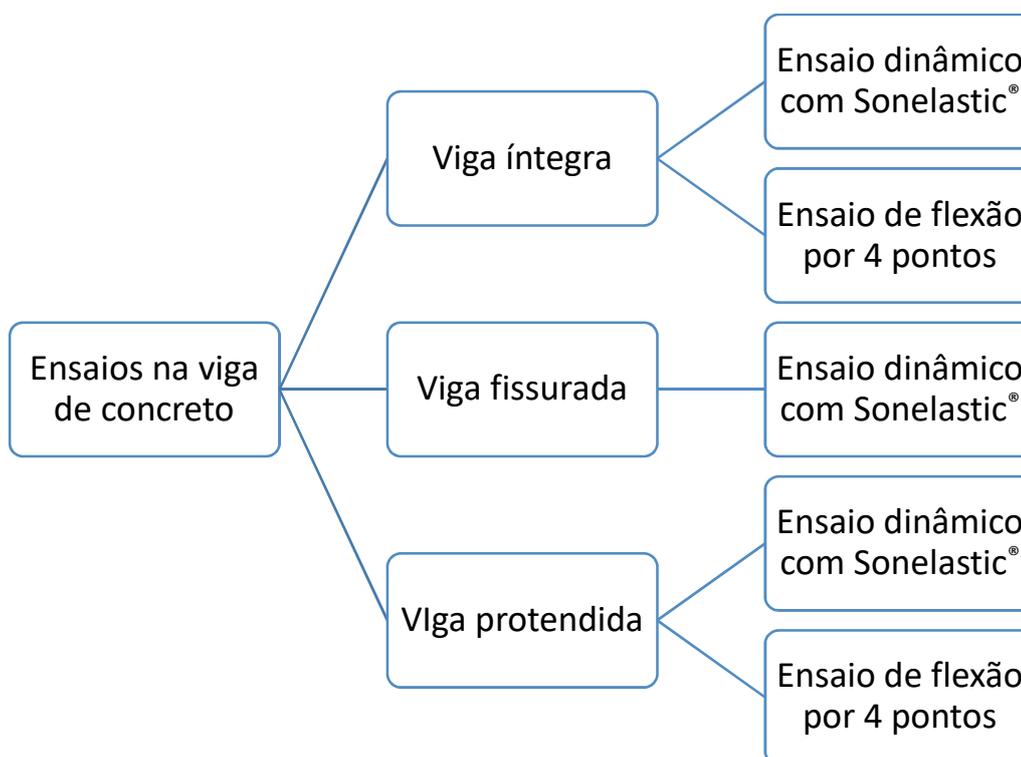


Fonte: do Autor (2018).

3.2.1 Ensaios realizados na viga

Após as etapas de fabricação da viga, iniciaram-se os ensaios, conforme mostrado no fluxograma da Figura 23.

Figura 23 - Fluxograma dos ensaios realizados na viga de concreto.

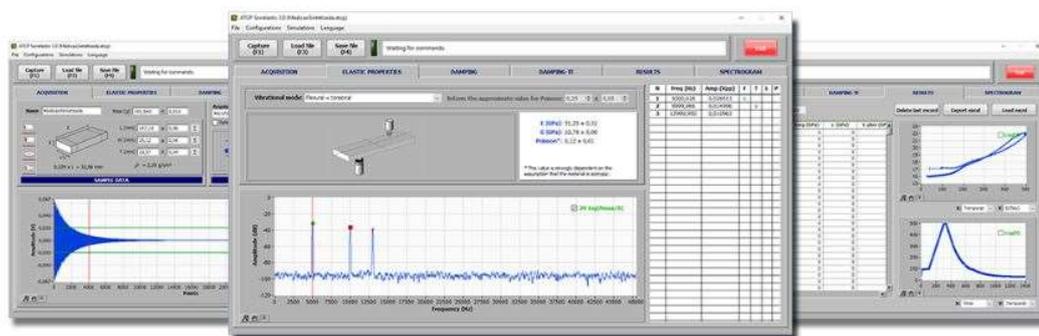


Fonte: do Autor (2018).

O primeiro ensaio realizado na viga de concreto armado foi não destrutivo e permitiu obter a frequência natural da estrutura íntegra.

Para todos os ensaios dinâmicos foram utilizadas as soluções Sonelastic®. Os itens utilizados desse equipamento, para o ensaio na viga, foram o *software* para computador (Figura 24), um martelo metálico para provocar o impulso e um captador acústico (Figura 25) que capta o som do objeto quando golpeado e transmite para o computador.

Figura 24 - Software do Sonelastic®.



Fonte: Internet⁸ (2018).

Figura 25 - Captador acústico do Sonelastic®.



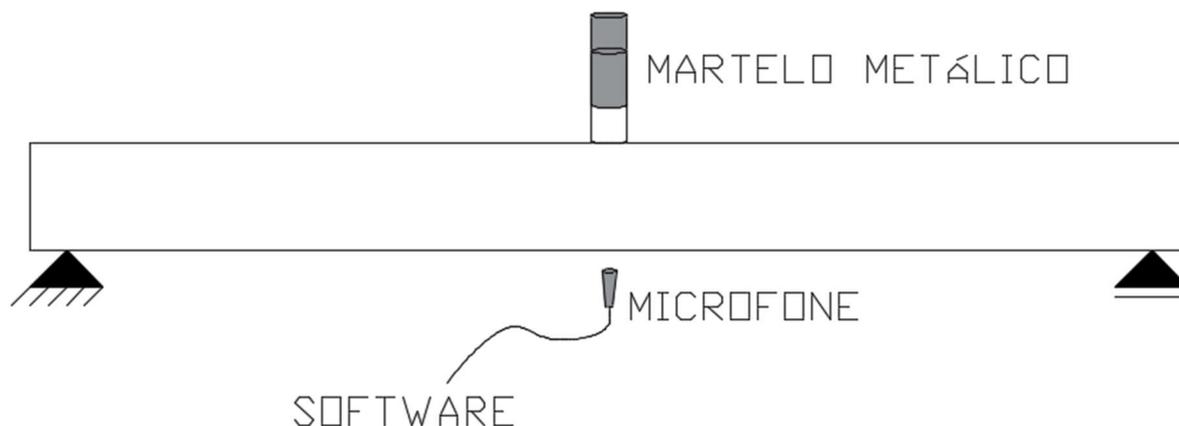
Fonte: Internet⁹ (2018).

O princípio do funcionamento do Sonelastic® nesse caso é semelhante ao explicado no item dos ensaios dinâmicos com corpos de prova. As capturas da frequência aconteciam no centro da viga quando o microfone era posicionado na face inferior e o golpe era aplicado na face superior (Figura 26). De acordo com o manual do Sonelastic®, é possível caracterizar qualquer material rígido com formatos regulares, que vão de vinte milímetros até três metros, de forma rápida, precisa e não destrutiva.

⁸ Fonte: <https://www.sonelastic.com/pt/productos/software.html>.

⁹ Fonte: <https://www.sonelastic.com/pt/productos/sensor-acustico.html>.

Figura 26 - Esquema do ensaio dinâmico com Sonelastic® para viga íntegra.



Fonte: do Autor (2018).

Em busca de imprimir um estado inicial de fissuração, visando à comparação dos parâmetros dinâmicos no estado não fissurado com o fissurado, realizou-se o segundo ensaio utilizando um atuador hidráulico com capacidade de 75 toneladas, fixado ao pórtico de reação e uma célula de carga (Figura 27). Optou-se pela aplicação do carregamento gradativo através do esquema de ensaio de flexão por quatro pontos, até carga próxima à carga última calculada para a viga. O ensaio se deu no LABEME na UFPB.

Figura 27 - Viga de concreto armado durante o ensaio de flexão por 4 pontos.



Fonte: do Autor (2018).

Em paralelo à aplicação gradativa do carregamento, mediram-se os deslocamentos verticais de duas seções, afastadas um metro de cada apoio (nos pontos de aplicação da carga). Para isso, foram utilizados relógios comparadores digitais posicionados na face inferior da viga.

As leituras dos deslocamentos medidos pelos relógios comparadores (Figura 28) eram feitas a cada 5kN que eram aplicados pelo atuador hidráulico. Além disso, no decorrer do ensaio foram marcadas na viga as fissuras que iam aparecendo e a respectiva carga que provocou essa fissura (Figura 29).

Figura 28 - Relógio comparador utilizado para medir deslocamento vertical da viga.



Fonte: do Autor (2018).

Figura 29 - Fissuras marcadas na viga durante o ensaio de flexão por 4 pontos.



Fonte: do Autor (2018).

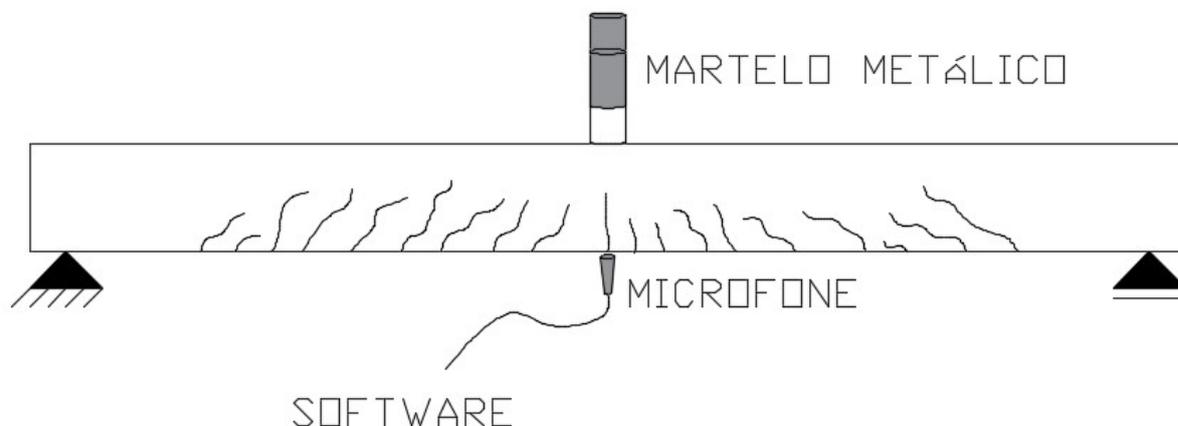
Com a viga fissurada (Figura 30) foi realizado o terceiro ensaio, semelhante ao primeiro. Utilizou-se o mesmo equipamento para realização do ensaio dinâmico e seguiram-se as mesmas orientações das normas que regem o uso do Sonelastic® (Figura 31). Essa prática teve o objetivo de aferir a nova frequência natural da viga fissurada para ser comparada e analisada posteriormente com os demais dados de frequência obtidos.

Figura 30 - Viga fissurada após o ensaio de flexão por 4 pontos.



Fonte: do Autor (2018).

Figura 31 - Esquema do ensaio dinâmico com Sonelastic® para viga fissurada.



Fonte: do Autor (2018).

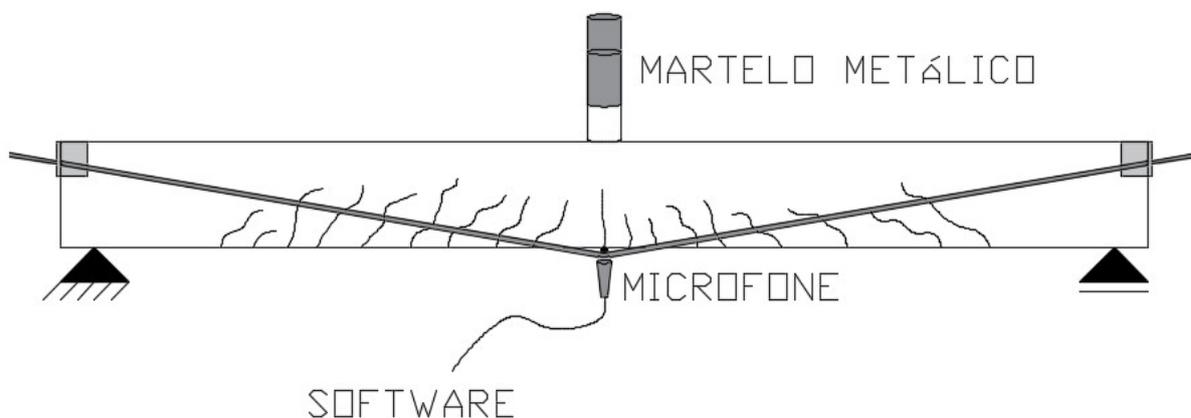
Ato contínuo, a viga foi protendida utilizando o sistema desenvolvido para esse experimento (Figura 32). Após a protensão, o quarto ensaio foi realizado objetivando aferir as características dinâmicas da viga protendida (Figura 33). Utilizaram-se os mesmos equipamentos e diretrizes para determinar a nova frequência natural da viga protendida para posteriormente ser analisada e comparada com os demais dados de frequência obtidos e observar qual o efeito da protensão na frequência desse elemento.

Figura 32 - Viga após a aplicação da protensão.



Fonte: do Autor (2018).

Figura 33 - Esquema do ensaio dinâmico com Sonelastic® para viga protendida.



Fonte: do Autor (2018).

Por último, a viga protendida foi ensaiada novamente à flexão por 4 pontos. Por segurança das pessoas e dos equipamentos utilizados, os deslocamentos verticais foram aferidos apenas até 50kN de carga vertical. Esta etapa visou observar os efeitos da protensão como elemento de reforço estrutural.

4 RESULTADOS E ANÁLISES

4.1 Resultado da caracterização do agregado miúdo e dos corpos de prova

4.1.1 Ensaios de granulometria do agregado miúdo

Para a caracterização do agregado miúdo foi realizado o ensaio de granulometria que teve como resultado o exposto na **Erro! Fonte de referência não encontrada.**

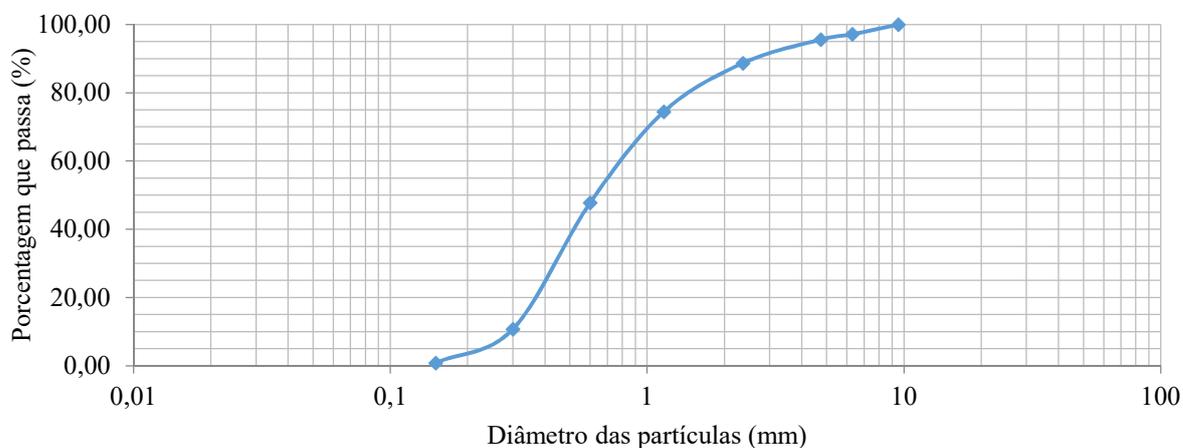
Tabela 3 - Resultados do ensaio de granulometria do agregado miúdo.

Areia					
Peneira (mm)	Peso retido (g)	Peso acumulado retido (g)	Percentagem retida (%)	Percentagem retida acumulada (%)	Percentagem passante acumulada (%)
9,50	15,5	0	1,55	0,00	100,00
6,30	28,6	28,6	2,86	2,86	97,14
4,75	15,5	44,1	1,55	4,41	95,59
2,36	68,9	113,0	6,89	11,30	88,70
1,16	143,1	256,1	14,30	25,60	74,40
0,60	266,4	522,5	26,63	52,23	47,77
0,30	370,5	893,0	37,04	89,26	10,74
0,15	99,1	992,1	9,91	99,17	0,83
Resíduo	8,3	1000,4	0,83	100,00	0,00
D _{máx}					4,75
Módulo de finura					2,82

Fonte: do Autor (2018).

O Figura 34 ilustra o gráfico de distribuição granulométrica da areia:

Figura 34 – Gráfico do ensaio de granulometria do agregado miúdo.



Fonte: do Autor (2018).

4.1.2 Ensaios dinâmico nos corpos de prova

O resultado obtido no ensaio dinâmico com o equipamento Sonelastic® para obtenção do Módulo de Elasticidade Dinâmico do concreto é observado na Tabela 4:

Tabela 4 - Módulo de Elasticidade Dinâmico do CPs.

Corpo de Prova	Módulo de Elasticidade (GPa)
02	33,36
03	33,03
04	32,71
Média	33,03
Coefficiente de Variação	0,46%

Fonte: do Autor (2018).

A partir dos resultados gerados pelo *software* do Sonelastic®, chega-se no resultado que o Módulo de Elasticidade Dinâmico do concreto utilizado para moldagem dos corpos de prova e construção da viga é aproximadamente de 33,03 GPa.

4.1.3 Ensaios de resistência à compressão

De acordo com a NBR 12655:2015, os resultados obtidos pelo ensaio de resistência à compressão nos corpos de prova de concreto são apresentados na Tabela 5. :

Tabela 5 - Resultado do ensaio à compressão.

Corpo de Prova	Idade (dias)	Resistência à compressão (MPa)	Ψ_6 (5 CPs)	Resistência à compressão segundo NBR 12655:2015 (MPa)
1	7	18,68	0,91	17,01
2	28	29,58	0,91	26,92
3	28	30,43	0,91	27,70
4	28	31,44	0,91	28,62
5	28	29,70	0,91	27,03
Média	28	30,29	Média	27,56
Coefficiente de Variação	28	1,23%	Coefficiente de Variação	1,23%

Fonte: do Autor (2018).

4.2 Resultado e análise dos ensaios na viga de concreto

4.2.1 Ensaios dinâmicos na viga de concreto

Para serem comparados com os resultados do ensaio experimental, foi calculado de forma analítica (Apêndice B: Cálculo da frequência natural da viga nas situações íntegra, fissurada e protendida) a frequência natural da viga de concreto nas diferentes situações, íntegra, fissurada e protendida (Tabela 6).

Tabela 6 – Frequência natural calculada analiticamente de acordo com os modos de vibrar, nos estados íntegro, fissurado e protendido da viga.

Modo	Frequência (Hz)		
	Íntegra	Fissurada	Protendida
1	57,30	49,51	54,94
2	229,18	198,06	222,53
3	515,66	445,63	501,83
4	916,74	792,24	892,85
5	1432	1238	1396
6	2063	1783	2010
7	2808	2426	2736
8	3667	3169	3574
9	4641	4011	4524

Fonte: do Autor (2018).

Para obtenção dos dados gerados pelo *software do Sonelastic*[®], realizaram-se 3 testes para os estados íntegro e protendido e 2 testes para o estado fissurado. A partir desses dados foi montada a Tabela 7 com os picos que se destacaram no espectro de frequências.

Tabela 7 – Picos de frequência destacados no espectro.

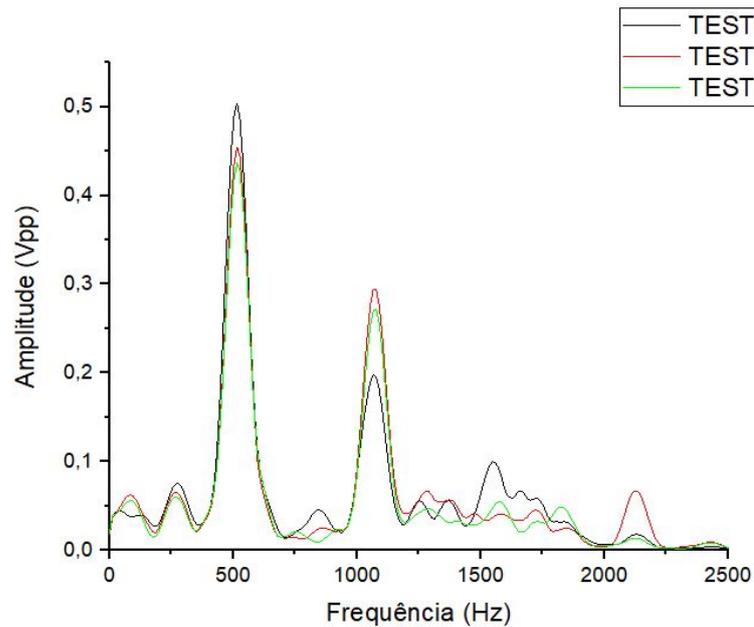
Estado da viga	Captação	1º Pico de Frequência (Hz)	2º Pico de Frequência (Hz)	3º Pico de Frequência (Hz)
Íntegro	TESTE 1	35,15	269,53	515,62
	TESTE 2	93,75	269,53	515,62
	TESTE 3	105,46	269,53	515,62
Fissurado	TESTE 1	421,87	984,37	-
	TESTE 2	468,75	984,37	-
Protendido	TESTE 1	468,75	1640,62	-
	TESTE 2	421,87	1500	-
	TESTE 3	421,87	1218,75	-

Fonte: do Autor (2018).

Destaca-se que os valores encontrados para o 1º pico de frequência no estado íntegro devem caracterizar frequências indesejadas advindas do ambiente onde foram realizados os ensaios.

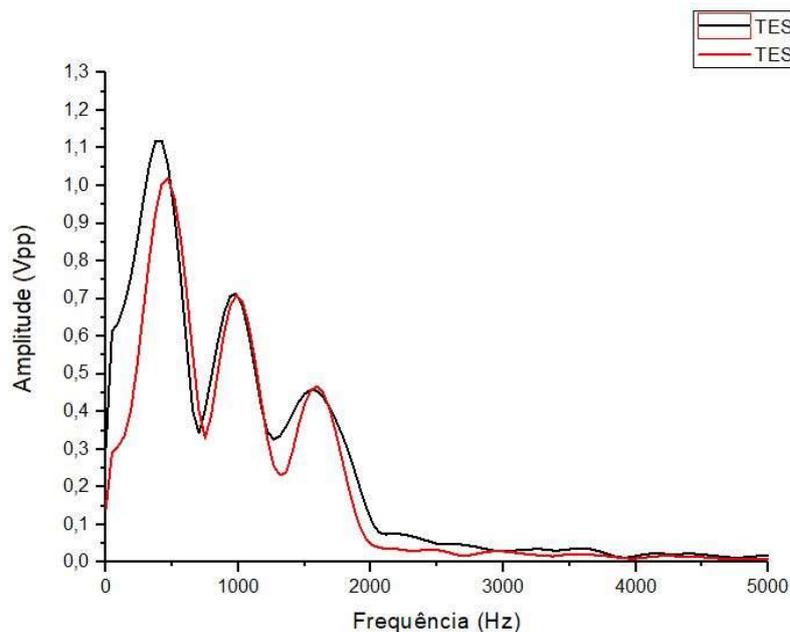
Os espectros mostrados nas Figura 35 à Figura 37 representam os espectros de frequências captados pelo Sonelastic®.

Figura 35 - Espectro da frequência natural da viga íntegra capturada no ensaio com o Sonelastic®.



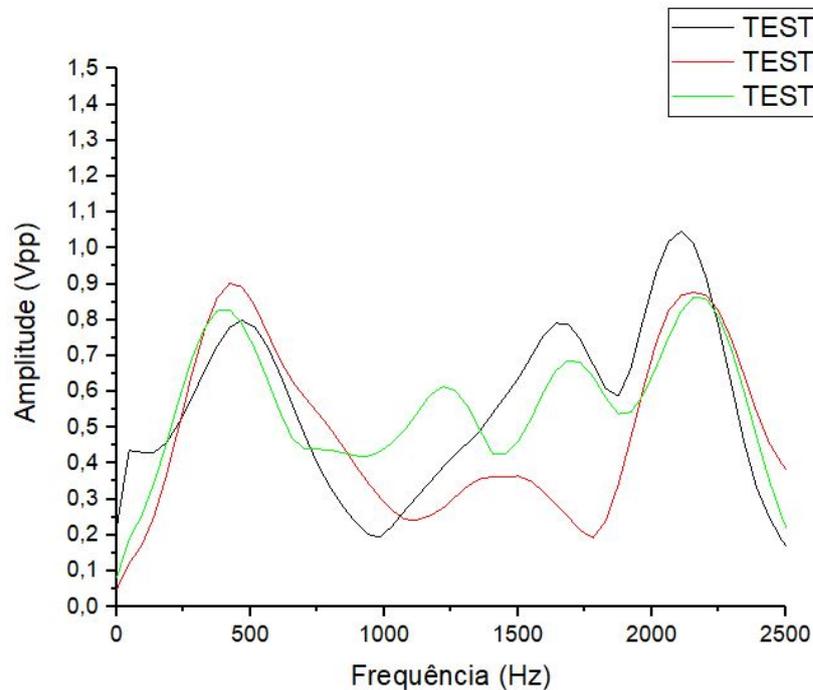
Fonte: do Autor (2018).

Figura 36 - Espectro da frequência natural da viga fissurada capturada no ensaio com o Sonelastic®.



Fonte: do Autor (2018).

Figura 37 - Espectro da frequência natural da viga protendida capturada no ensaio com o Sonelastic®.



Fonte: do Autor (2018).

Analisando os espectros e os picos de frequência identificados pelo Sonelastic®, foi observado que as frequências naturais do terceiro modo de vibrar foram as melhores captadas. Isso ocorre devido a uma limitação do Sonelastic® de trabalhar com faixas de frequências superiores.

Propriedades que interferem na frequência natural, como a rigidez do elemento, independem do modo de vibrar da estrutura. Portanto, para o estudo foram utilizadas as frequências melhores captadas que são referentes ao 3º modo de vibração (Tabela 8).

Tabela 8 - Resultados de frequência natural selecionados para serem analisados e comparados.

Estado da viga	Frequência (Hz)	Modo de Vibração
Íntegra	515,62	3º
Fissurada	421,87	3º
Protendida	421,87	3º

Fonte: do Autor (2018).

- Viga íntegra:

Os resultados obtidos para a viga íntegra mostram que os valores previstos pelo cálculo da frequência natural de forma analítica são bastantes precisos e semelhantes aos valores encontrados experimentalmente (Tabela 9). Isso ocorre, principalmente, pois é possível ter um controle maior nos dados utilizados no problema analítico e principalmente nos valores de Momento de Inércia e Módulo de Elasticidade.

Tabela 9 - Valores da 3ª frequência analítica e experimental para a viga íntegra.

Estado da viga	Frequência calculada Analiticamente (Hz)	Frequência encontrada Experimentalmente (Hz)
Íntegra	515,66	515,62

Fonte: do Autor (2018).

- Viga fissurada:

Os resultados obtidos para a viga fissurada mostram que os valores previstos pelo cálculo da frequência natural de forma analítica são semelhantes aos encontrados experimentalmente (Tabela 10).

O processo de fissuração provoca uma perda de rigidez das seções e conseqüentemente uma diminuição da frequência natural da peça, visto que são propriedades diretamente proporcionais. Como não é possível quantificar precisamente a perda na rigidez, os resultados da frequência natural calculada analiticamente utilizam aproximações desse parâmetro o que faz com que o resultado não seja tão preciso quanto ao encontrado experimentalmente.

Tabela 10 – Valores da 3ª frequência analítica e experimental para a viga fissurada.

Estado da viga	Frequência calculada Analiticamente (Hz)	Frequência encontrada Experimentalmente (Hz)
Fissurada	445,73	421,87

Fonte: do Autor (2018).

- Viga protendida:

Os resultados obtidos para a viga protendida mostram que o cálculo da frequência natural através da forma analítica não forneceu resultados semelhante ao encontrado experimentalmente (Tabela 11). De acordo com o que foi calculado, era esperado que os valores encontrados experimentalmente para a frequência natural da viga protendida fossem maiores.

Tabela 11 - Valores da 3ª frequência analítica e experimental para a viga protendida.

Estado da viga	Frequência calculada Analiticamente (Hz)	Frequência encontrada Experimentalmente (Hz)
Protendida	501,84	421,87

Fonte: do Autor (2018).

O aumento da frequência da estrutura não está diretamente ligado ao acréscimo no valor da força axial, pelo contrário, quanto maior a força axial de compressão aplicada no elemento menor será a frequência natural deste. Porém essa força provoca, de forma indireta, um aumento da rigidez, devido ao fechamento das fissuras presentes no elemento, o que provoca de forma bem mais expressiva o aumento da frequência do elemento.

De acordo com os resultados mostrados pela Tabela 11 ocorreu uma diferença no valor da frequência natural calculada analiticamente quando comparado ao observado experimentalmente. Essa divergência nos resultados obtidos pode ser atribuída a insuficiência no aumento da rigidez da viga devido à pequena força axial aplicada.

Destacam-se que havia limitações no sistema de protensão utilizado, pois não eram disponíveis materiais e equipamentos específicos que são comumente utilizados nas técnicas de protensão já patenteadas e existentes no mercado.

4.2.2 Ensaio de flexão por 4 pontos na viga de concreto

Durante os ensaios de flexão por 4 pontos utilizaram-se relógios comparadores para aferir os deslocamentos verticais de duas seções para a situação sem e com protensão. Para facilitar o entendimento, essas seções foram nomeadas de A e B e se encontram distantes um metro dos apoios direito e esquerdo, respectivamente. Para uma melhor análise calculou-se a diferença nos deslocamentos das seções entre as duas situações abordadas. A Tabela 12 mostra os resultados de deslocamento para as duas situações e a diferença entre eles.

Para a situação sem protensão, os deslocamentos foram contabilizados a partir de um carregamento de 30kN, tal fato ocorreu por um erro de utilização dos relógios comparadores. Essa aferição continuou até a carga de 51,2kN. Para a situação com protensão, os deslocamentos foram aferidos até a carga de 50kN, porém o carregamento aplicado na estrutura continuou até o máximo suportado que foi 57,8kN.

Tabela 12 - Deslocamentos verticais no ensaio de flexão por 4 pontos para situação sem e com protensão.

Sem Protensão			Com Protensão			Diminuição provocada pela protensão	
Força (kN)	Deslocamento (mm)		Força (kN)	Deslocamento (mm)		Deslocamento (mm)	
	Seção A	Seção B		Seção A	Seção B	Seção A	Seção B
5	-	-	8	-2,5	-2,03	-	-
10	-	-	10	-2,67	-2,2	-	-
15	-	-	15	-3,55	-3,4	-	-
20	-	-	20	-4,48	-3,92	-	-
25	-	-	25	-5,35	-4,75	-	-
30	-7,47	-7,1	30	-6,27	-5,6	1,2	1,5
35	-8,51	-8,1	35	-7,17	-6,44	1,34	1,66
40	-9,74	-9,18	40	-8,03	-7,25	1,71	1,93
45	-11,04	-10,41	45	-8,92	-8,1	2,12	2,31
50	-12,63	-11,78	50	-9,77	-8,9	2,86	2,88
51,2	-13,82	-12,56	57,8	-	-	-	-

Fonte: do Autor (2018).

Fazendo a análise dos resultados mostrados na Tabela 12 notou-se que, mesmo com a aplicação de uma pequena protensão ocorreu um considerável reforço estrutural. Houve uma diminuição na flecha provocada pela aplicação da carga quando comparada com a situação sem protensão. Esse fato já era esperado e mostra a eficácia da tecnologia de protensão em estruturas que necessitam deformações limitadas. Outra característica bastante importante que foi melhorada com a aplicação da simples protensão, foi a capacidade de suporte de carga da viga. Foi observado que durante o ensaio à flexão por 4 pontos, para o estado sem protensão, a carga máxima aplicada foi de 51,2kN enquanto na situação protendida a carga máxima aumentou e chegou à 57,8kN.

4.2.3 Protensão da viga de concreto

Os resultados de deslocamentos verticais medidos no decorrer da aplicação da protensão são observados na Tabela 13:

Tabela 13 - Deslocamento vertical da viga devido à protensão da estrutura.

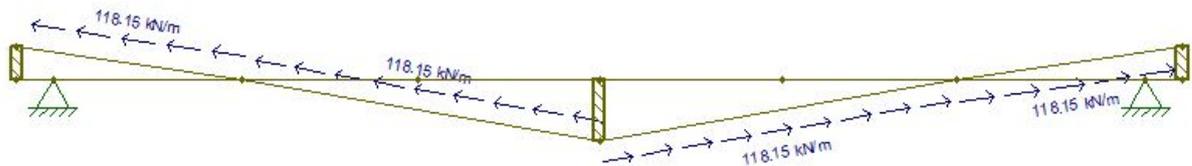
Tempo	Deslocamento vertical na seção à 1 m do apoio esquerdo (mm)	Deslocamento vertical na seção à 1 m do apoio direito (mm)
Início	0,2	0,1
Fim	2,5	2,5
Variação	2,3	2,4
Variação média	2,35	
Coefficiente de Variação	1,50%	

Fonte: do Autor (2018).

Com a aplicação da protensão ocorreu um deslocamento vertical positivo da viga. As seções distantes um metro dos apoios tiveram uma média de 2,35 milímetros de deslocamento.

Essa informação foi utilizada para calcular a força aplicada nas barras. Para isso, foi utilizado o Ftool. No *software*, que simulou a situação, foi atribuído, por meio do método de tentativas, uma força axial à barra necessária para provocar um deslocamento vertical na viga semelhante ao encontrado experimentalmente. De acordo com o modelo desenhado no programa, a força axial nas barras seria de 118,15kN (Figura 38). O deslocamento provocado na viga por essa força é mostrado na Figura 39.

Figura 38 - Força axial de protensão necessária para provocar o deslocamento medido (Ftool).



Fonte: do Autor (2018).

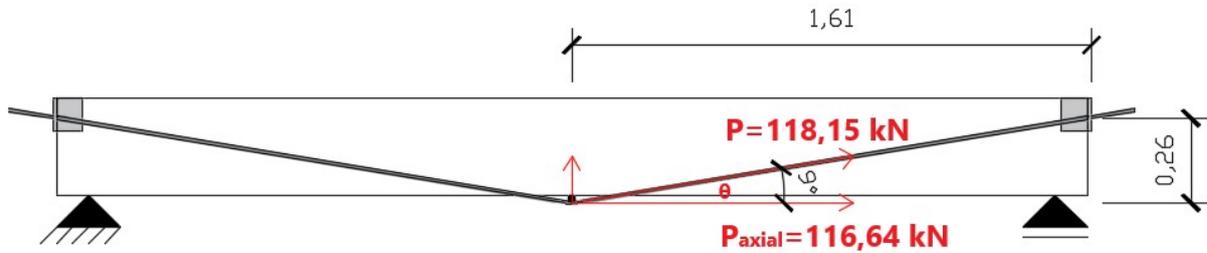
Figura 39 - Deslocamento provocado pela força de protensão (Ftool).



Fonte: do Autor (2018).

A partir da força de protensão (P) aplicada na barra de aço, foi possível calcular a força axial (P_{axial}) resultante na viga (Figura 40), que foi necessária para o cálculo da frequência natural da viga protendida pelo método analítico.

Figura 40 - Força axial aplicada na viga.



Fonte: do Autor (2018).

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

5.1 Conclusão

O trabalho mostrou que o método analítico utilizado para cálculo da frequência natural das estruturas de concreto gera valores bastantes semelhantes e precisos quando comparado aos resultados obtidos experimentalmente. Deve-se destacar que, para que os resultados analíticos sejam coerentes com a realidade é indispensável quantificar precisamente a rigidez da estrutura. Como essa característica do elemento depende de propriedades como módulo de elasticidade do material e momento de inércia das seções, isso dificulta a obtenção de valores precisos para situações com seções fissuradas ou heterogêneas.

Diante das limitações do método de protensão utilizado para os ensaios, não foi possível provocar um aumento na rigidez da viga de concreto o que conseqüentemente impossibilitou uma melhor análise dos efeitos da protensão na frequência natural da estrutura.

Mesmo com as deficiências no sistema de protensão utilizado, atingiram-se resultados bastantes satisfatórios para a protensão como reforço da estrutura. Com o elemento protendido verificaram-se valores de deslocamentos verticais menores e maior suporte de carga. Esses indicadores sinalizam uma maior resistência da estrutura aos esforços aplicados.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Os estudos das características dinâmicas estão se tornando cada vez mais importante para uma completa análise estrutural. Como sugestão de trabalhos futuros, seguem os temas:

- Indica que seja realizada uma modelagem numérica com o problema abordado, a fim de comparar os resultados obtidos em laboratório com os esperados gerados pela modelagem, possibilitando uma nova correção das hipóteses;
- Estudar a frequência natural referente aos primeiros modos de vibração das estruturas;
- Analisar a frequência natural de estruturas protendidas com tecnologias patenteadas e usuais no mercado;
- Estudar os métodos analíticos utilizados para obtenção da rigidez das estruturas nas situações de elementos danificados;
- Utilização de tecnologias patenteadas de protensão externa para reforço estrutural.

REFERÊNCIAS

AGOSTINI, L. R. S. **Concreto Protendido: estudo das vigas isostáticas**. São Paulo: Editora Livraria Ciência e Tecnologia. São Paulo, 1983.

ALMEIDA, S. F. (2005). **Análise dinâmica experimental da rigidez de elementos de concreto submetido à danificação progressiva até a ruptura**. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2005.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS (2014). **C215-14**: Standard test method for fundamental transverse, longitudinal and torsional frequencies of concrete specimens. Philadelphia, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 12655**: Concreto de cimento Portland - Preparo, controle, recebimento e aceitação - Procedimento. Rio de Janeiro, 2015.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14931**: Execução de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 16697**: Cimento Portland – Requisitos. Rio de Janeiro, 2018.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5738**: Concreto – Procedimento para moldagem e cura de corpos-de-prova, Versão corrigida:2016. Rio de Janeiro, 2016.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 5739**: Concreto – Ensaio de compressão de corpos-de-prova cilíndricos. Rio de Janeiro, 2018.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de Estruturas de Concreto: Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR NM 248**: Agregados – Determinação da composição granulométrica. Rio de Janeiro, 2003.

BLESSMANN, J. **O vento na engenharia estrutural**. 1. Ed. Porto Alegre: Editora da Universidade/UFRGS, 1995.

BLEVINS, D. R. (1979). **Formulas for natural frequency and mode shape**. USA: Van Nostrand Reinhold Company, Inc.

CARVALHO, R. C. **Estruturas de concreto protendido: cálculo e detalhamento**. 1. Ed. São Paulo: Editora Pini, 2012.

COSSOLINO, L. C.; PEREIRA, A. H. A. **Amortecimento: classificação e métodos de determinação**. Universidade de São Carlos, 2010.

DIÓGENES, H. J. F. **Análise tipológica de elementos e sistemas construtivos pré-moldados de concreto do ponto de vista de sensibilidade a vibração em serviço**. 2010. 210f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

GAMA, C. D., PANEIRO, G. (2006). **A incomodidade humana perante as vibrações e sua caracterização absoluta e relativa**. Centro de Geotecnia, IST, Lisboa, Portugal.

HIBBELER, R. C. **Dinâmica: Mecânica para engenharia**. 10. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005. v. 2.

LAROCCA, A. P. C. (2004). **O uso do GPS como instrumento de controle de deslocamentos dinâmicos de obras civis – Aplicação na área de transportes**. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

MENDES P. J. H. **Dinâmica de Estruturas. Sebenta da unidade curricular Dinâmica de Estruturas**. 2012. Departamento de Engenharia Civil, Instituto Superior de Engenharia de Lisboa, Lisboa, 2012.

MOREIRA, T. V. (2002). **Análise da sensibilidade dinâmica de edifícios com estruturas esbeltas**. Tese (Doutorado) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro. 2002.

MOREIRA FILHO, C. A. **Análise estática não linear plana de pontes estaiadas e determinação das frequências naturais e modos de vibração.** Dissertação de mestrado – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

PRADELLA, C. F. **Vibrações em estruturas:** estudo de edificação comercial em Garibaldi/RS. 2013.

SAIDI, M.; DOUGLAS, B.; FENG, S. (1994). Prestress Force Effect on Vibration Frequency of Concrete Bridges. **Journal of Structural Engineering**, Vol. 120, No. 7, July 1994, pp. 2233-2241.

SAN MARTINS, D. A. **Confiabilidade de vigas pré-tracionadas de concreto protendido.** 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, UFRGS, Porto Alegre.

APÊNDICE

Apêndice A: Dimensionamento da armadura passiva da viga de concreto

DIMENSIONAMENTO DA ARMADURA PASSIVA DA VIGA DE CONCRETO

I - Dados iniciais:

$bw := 14 \text{ cm}$	$\gamma_c := 1$	Coef. de ponderação de resist. do concreto
$h := 30 \text{ cm}$	$\gamma_s := 1$	Coef. de ponderação de resist. do aço
$L := 300 \text{ cm}$	$\gamma_1 := 1$	Coef. de majoração das cargas
$\gamma_{conc} := 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$	$f_{ck} := 25$	C25: Resist. caract. do concreto à compressão
	$f_{yk} := 500 \text{ MPa}$	CA-50: Resist. característica do aço à tração
	$f_{yk60} := 600 \text{ MPa}$	CA-60: Resist. característica do aço à tração

$c := 3 \text{ cm}$ Cobrimento p/CAA-II

$\phi_c := 5 \text{ mm}$ Estribo adotado

-Características sobre a seção:

$$A := bw \cdot h = 0.042 \text{ m}^2$$

$$P := 2 \cdot (bw + h) = 0.88 \text{ m}$$

II - Carregamento atuante:

$$Fq := 2.55 \text{ tonnef} = 25.007 \text{ kN} \quad (\text{Força total aplicada} = 2Fq)$$

$$2 Fq = 50.014 \text{ kN}$$

$$g := \gamma_{conc} \cdot A = 1.05 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$R_{\text{apoio}} := \frac{2 \cdot Fq + g \cdot L}{2} = 26.582 \text{ kN}$$

$$M_{\text{máx}} := R_{\text{apoio}} \cdot \frac{L}{2} - g \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{4} - Fq \cdot \frac{L}{6} = 26.188 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_k := M_{\text{máx}} = 26.188 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad Md := \gamma_1 \cdot M_k = 26.188 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$V_k := R_{\text{apoio}} = 26.582 \text{ kN} \quad Vd := \gamma_1 \cdot V_k = 26.582 \text{ kN}$$

$$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot \text{MPa} = 25 \text{ MPa}$$

$$f_{ctm} := 0.3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \cdot \text{MPa} = 2.565 \text{ MPa}$$

III - Cálculo da armadura longitudinal:

$$\phi_{long} := 12.5 \text{ mm} \quad (\text{Bitola da armadura adotada})$$

$$A_{\phi long} := \pi \cdot \frac{\phi_{long}^2}{4} = 1.227 \text{ cm}^2 \quad (\text{Área de uma barra})$$

$$n := 2 \quad (\text{Adotado duas barras de 12.5mm})$$

$$d' := c + \phi_e + \frac{\phi_{long}}{2} = 0.041 \text{ m}$$

$$d := h - d' = 0.259 \text{ m}$$

$$K_{iic} := \frac{d}{\sqrt{\frac{Md}{bw \cdot kN}}} = 0.019 \text{ m} \quad (\text{Domínio 2})$$

$$-0.4 \cdot Kx^2 + Kx = \frac{1}{0.85 \cdot f_{cd} \cdot 0.8 \cdot K_{iic}^2}$$

$$a_1 := -0.4$$

$$b_1 := 1$$

$$c_1 := \frac{-1}{0.85 \cdot \left(\frac{1000 \cdot f_{cd}}{MPa}\right) \cdot 0.8 \cdot \left(\frac{K_{iic}}{m}\right)^2} = -0.164$$

$$K_{x'} := \frac{(-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot c_1})}{2 \cdot a_1} = 0.177$$

$$K_{x''} := \frac{(-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4 \cdot a_1 \cdot c_1})}{2 \cdot a_1} = 2.323$$

$$K_x := \min(K_{x'}, K_{x''}) = 0.177 \quad (\text{Domínio 2})$$

$$x := K_x \cdot d = 0.046 \text{ m}$$

$$K_z := 1 - 0.4 \cdot K_x = 0.929$$

$$A_s := \frac{Md}{K_z \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \cdot d} = 2.178 \text{ cm}^2 \quad (\text{As adotado é maior que As calculado -> OK!})$$

$$A_{s \text{ adotado}} := n \cdot A_{\phi long} = 2.454 \text{ cm}^2 \quad (\text{As adotado } 2 \phi 12.5 \text{ mm})$$

IV - Cálculo da armadura transversal:

-Verificação da biela: $V_{sd} < V_{rd2}$

$$f_{cd} := \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \cdot MPa = 25 \text{ MPa}$$

$$\alpha_{v2} := 1 - \frac{f_{ck}}{250} = 0.9$$

$$V_{sd} := \gamma_1 \cdot V_k = 26.582 \text{ kN}$$

$$V_{Rd2} := 0.27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot bw \cdot d = 220.067 \text{ kN} \quad (V_{sd} < V_{rd2} \rightarrow \text{OK!})$$

-Cálculo da armadura transversal: $V_{sd} < V_{rd3} = V_c + V_{sw}$

$$V_{sd} = 26.582 \text{ kN} \quad (\text{Concreto resiste o suficiente})$$

$$V_c := 0.6 \cdot f_{ctd} \cdot bw \cdot d = 39.025 \text{ kN} \quad (\text{Não necessita de armadura transversal})$$

$$V_{sw} := V_{sd} - V_c = -12.443 \text{ kN} \quad (\text{Usar armadura transversal mínima})$$

$$f_{ywd} := \frac{f_{yk}}{\gamma_s} = 500 \text{ MPa}$$

$$a_{sw} := \frac{V_{sw}}{(0.9 \cdot d \cdot f_{ywd})} = -0.011 \text{ cm}$$

$$a_{sw.min} := 0.1026\% \cdot bw \cdot \frac{100 \text{ cm}}{m} = 1.436 \frac{1}{m} \cdot \text{cm}^2$$

$$A_{s_{barra}} := \pi \cdot \frac{\phi_c^2}{4} = 0.196 \text{ cm}^2 \quad (\text{Área de uma barra 5.0mm})$$

$$esp := 10 \text{ cm}$$

$$a_{sw.adotado} := \frac{(A_{s_{barra}})}{esp} \cdot 100 \frac{\text{cm}}{m} = 1.963 \frac{1}{m} \cdot \text{cm}^2 \quad (\text{asw adotado} > \text{asw min} \rightarrow \text{OK})$$

Apêndice B: Cálculo da frequência natural da viga nas situações íntegra, fissurada e protendida

Cálculo da Frequência Natural - Viga Íntegra

Dados iniciais:

a) Seção:

$$\begin{aligned} bw &:= 14 \text{ cm} && \text{(base)} \\ h &:= 30 \text{ cm} && \text{(altura)} \\ A_c &:= bw \cdot h = 420 \text{ cm}^2 && \text{(área)} \\ y &:= 14.76 \text{ cm} && \text{(centroide - seção homogeneizada)} \\ L &:= 3 \text{ m} && \text{(vão)} \\ I_x &:= 34934.84 \text{ cm}^4 && \text{(momento de inércia - seção homogeneizada)} \end{aligned}$$

$$\gamma_c := 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$m := \gamma_c \cdot A_c = (1.05 \cdot 10^3) \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b) Concreto:

$$E_{cs} := 33.03 \text{ GPa} \quad \text{(Módulo Dinâmico - Medido no Sonelastic)}$$

c) Frequência Natural:

-Número de aquisições: 9 aquisições

$$\lambda_1 := 1 \cdot \pi \quad (1^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_2 := 2 \cdot \pi \quad (2^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_3 := 3 \cdot \pi \quad (3^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_4 := 4 \cdot \pi \quad (4^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_5 := 5 \cdot \pi \quad (5^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_6 := 6 \cdot \pi \quad (6^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_7 := 7 \cdot \pi \quad (7^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_8 := 8 \cdot \pi \quad (8^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_9 := 9 \cdot \pi \quad (9^\circ \text{ modo})$$

-Frequência Natural:

$$f_1 := \frac{\lambda_1^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = 57.296 \text{ Hz}$$

$$f_2 := \frac{\lambda_2^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = 229.185 \text{ Hz}$$

$$f_3 := \frac{\lambda_3^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = 515.667 \text{ Hz}$$

$$f_4 := \frac{\lambda_4^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = 916.741 \text{ Hz}$$

$$f_5 := \frac{\lambda_5^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (1.432 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_6 := \frac{\lambda_6^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (2.063 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_7 := \frac{\lambda_7^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (2.808 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_8 := \frac{\lambda_8^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (3.667 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_9 := \frac{\lambda_9^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (4.641 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

-Tempo de aquisição: $n := 1024$

$$\Delta t_1 := \frac{1}{2 \cdot f_1} = 0.009 \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_1 = 8.936 \text{ s}$$

$$\Delta t_2 := \frac{1}{2 \cdot f_2} = 0.002 \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_2 = 2.234 \text{ s}$$

$$\Delta t_3 := \frac{1}{2 \cdot f_3} = (9.696 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_3 = 0.993 \text{ s}$$

$$\Delta t_4 := \frac{1}{2 \cdot f_4} = (5.454 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_4 = 0.559 \text{ s}$$

$$\Delta t_5 := \frac{1}{2 \cdot f_5} = (3.491 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_5 = 0.357 \text{ s}$$

$$\Delta t_6 := \frac{1}{2 \cdot f_6} = (2.424 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_6 = 0.248 \text{ s}$$

$$\Delta t_7 := \frac{1}{2 \cdot f_7} = (1.781 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_7 = 0.182 \text{ s}$$

$$\Delta t_8 := \frac{1}{2 \cdot f_8} = (1.364 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_8 = 0.14 \text{ s}$$

$$\Delta t_9 := \frac{1}{2 \cdot f_9} = (1.077 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_9 = 0.11 \text{ s}$$

Cálculo da Frequência Natural - Viga Fissurada

The screenshot shows a software interface for calculating the natural frequency of a cracked beam. On the left, a coordinate system (X and Y in cm) displays a rectangular cross-section with a width of 14 cm and a height of 30 cm. The center of the section is at X=0 and Y=15. On the right, a data entry panel is visible, showing the following information:

- Seção Transversal:** Concreto | Armadura Passiva | Armadura Ativa
- Seção Bruta:** Estado I | Estado II
- Propriedades da Seção Bruta:**
 - Área Homogeneizada (cm²): 105,65
 - X_{cg} (cm): 7
 - Y_{cg} (cm): 23,90
 - Momento de inércia em X (cm⁴): 6562,92
 - Momento de inércia em Y (cm⁴): 1574,04
 - Produto de inércia (cm⁴): 0
 - Inclinação do Eixo P. de inércia (°): 0
 - Inclinação da LN (°): 0
- Relação entre Módulos:**
 - alfa = 5,71
 - alfa = 5,43
 - alfa = 10
 - alfa = 15
- Botão:** CALCULAR

Dados iniciais:

a) Seção:

$bw := 14 \text{ cm}$ (base)
 $h := 30 \text{ cm}$ (altura)
 $A_c := 105.65 \text{ cm}^2$ (área)
 $y := 23.34 \text{ cm}$ (centroide - seção homogeneizada)
 $L := 3 \text{ m}$ (vão)
 $I_x := 6562.92 \text{ cm}^4$ (momento de inércia - seção homogeneizada)

b) Concreto:

$E_{cs} := 33.03 \text{ GPa}$ (Medido pelo ensaio no Sonelastic)

c) Frequência Natural:

-Número de aquisições: 3 aquisições

$\lambda_1 := 1 \cdot \pi$ (1º modo)

$\lambda_2 := 2 \cdot \pi$ (2º modo)

$$\lambda_3 := 3 \cdot \pi \quad (3^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_4 := 4 \cdot \pi \quad (4^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_5 := 5 \cdot \pi \quad (5^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_6 := 6 \cdot \pi \quad (6^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_7 := 7 \cdot \pi \quad (7^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_8 := 8 \cdot \pi \quad (8^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_9 := 9 \cdot \pi \quad (9^\circ \text{ modo})$$

-Frequência Natural:

$$f_1 := \frac{\lambda_1^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = 49.515 \text{ Hz}$$

$$f_2 := \frac{\lambda_2^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = 198.06 \text{ Hz}$$

$$f_3 := \frac{\lambda_3^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = 445.634 \text{ Hz}$$

$$f_4 := \frac{\lambda_4^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = 792.238 \text{ Hz}$$

$$f_5 := \frac{\lambda_5^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (1.238 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_6 := \frac{\lambda_6^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (1.783 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_7 := \frac{\lambda_7^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (2.426 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_8 := \frac{\lambda_8^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (3.169 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_9 := \frac{\lambda_9^2}{2 \cdot \pi \cdot L^2} \cdot \sqrt{\frac{(Ecs \cdot I_x) \cdot g}{m}} = (4.011 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

-Tempo de aquisição: $n := 1024$

$$\Delta t_1 := \frac{1}{2 \cdot f_1} = 0.01 \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_1 = 10.34 \text{ s}$$

$$\Delta t_2 := \frac{1}{2 \cdot f_2} = 0.003 \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_2 = 2.585 \text{ s}$$

$$\Delta t_3 := \frac{1}{2 \cdot f_3} = 0.001 \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_3 = 1.149 \text{ s}$$

$$\Delta t_4 := \frac{1}{2 \cdot f_4} = (6.311 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_4 = 0.646 \text{ s}$$

$$\Delta t_5 := \frac{1}{2 \cdot f_5} = (4.039 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_5 = 0.414 \text{ s}$$

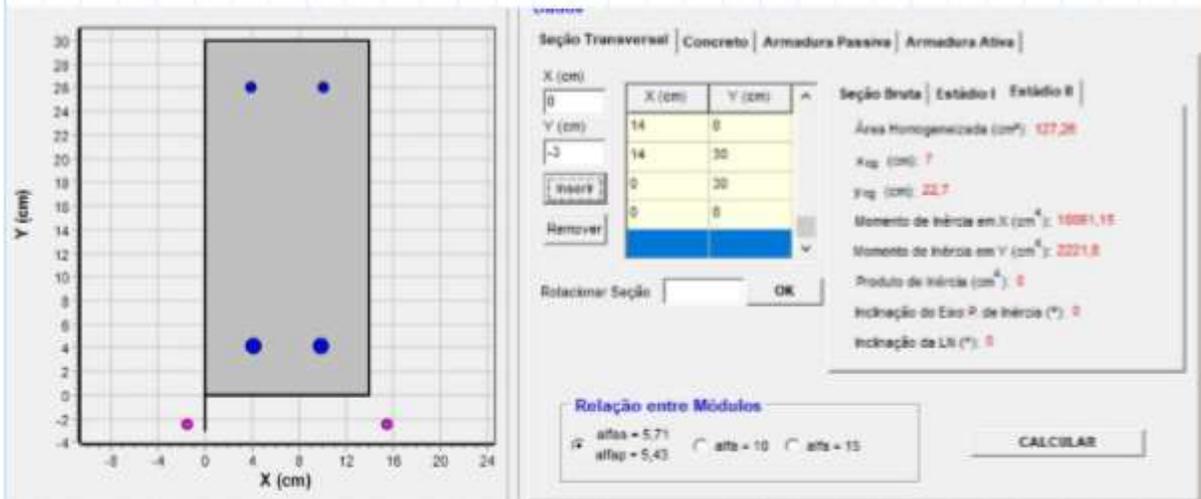
$$\Delta t_6 := \frac{1}{2 \cdot f_6} = (2.805 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_6 = 0.287 \text{ s}$$

$$\Delta t_7 := \frac{1}{2 \cdot f_7} = (2.061 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_7 = 0.211 \text{ s}$$

$$\Delta t_8 := \frac{1}{2 \cdot f_8} = (1.578 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_8 = 0.162 \text{ s}$$

$$\Delta t_9 := \frac{1}{2 \cdot f_9} = (1.247 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_9 = 0.128 \text{ s}$$

Cálculo da Frequência Natural - Viga Protendida



Dados iniciais:

a) Seção:

$$\begin{aligned}
 bw &:= 14 \text{ cm} && \text{(base)} \\
 h &:= 30 \text{ cm} && \text{(altura)} \\
 A_c &:= 127.26 \text{ cm}^2 && \text{(área)} \\
 y &:= 14.7 \text{ cm} && \text{(centroide - seção homogeneizada)} \\
 L &:= 3 \text{ m} && \text{(vão)} \\
 I_x &:= 10061.15 \text{ cm}^4 && \text{(momento de inércia - seção homogeneizada)}
 \end{aligned}$$

$$\gamma_c := 25 \frac{\text{kN}}{\text{m}^3}$$

$$m := \gamma_c \cdot A_c = 318.15 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

b) Concreto:

$$P := 118.15 \text{ kN} \quad \text{(força de protensão)}$$

$$E_{cs} := 33.03 \text{ GPa}$$

c) Frequência Natural:

-Número de aquisições: 3 aquisições

$$\lambda_1 := 1 \cdot \pi \quad (1^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_2 := 2 \cdot \pi \quad (2^\circ \text{ modo})$$

$$\lambda_3 := 3 \cdot \pi \quad (3^{\circ} \text{ modo})$$

$$\lambda_4 := 4 \cdot \pi \quad (4^{\circ} \text{ modo})$$

$$\lambda_5 := 5 \cdot \pi \quad (5^{\circ} \text{ modo})$$

$$\lambda_6 := 6 \cdot \pi \quad (6^{\circ} \text{ modo})$$

$$\lambda_7 := 7 \cdot \pi \quad (7^{\circ} \text{ modo})$$

$$\lambda_8 := 8 \cdot \pi \quad (8^{\circ} \text{ modo})$$

$$\lambda_9 := 9 \cdot \pi \quad (9^{\circ} \text{ modo})$$

-Frequência Natural:

$$f_1 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_1}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_1}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = 54.947 \text{ Hz}$$

$$f_2 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_2}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_2}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = 222.532 \text{ Hz}$$

$$f_3 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_3}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_3}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = 501.832 \text{ Hz}$$

$$f_4 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_4}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_4}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = 892.852 \text{ Hz}$$

$$f_5 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_5}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_5}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = (1.396 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_6 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_6}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_6}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = (2.01 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_7 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_7}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_7}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = (2.736 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_8 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_8}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_8}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = (3.574 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

$$f_9 := \frac{1}{2 \cdot \pi} \sqrt{-\left(\frac{\lambda_9}{L}\right)^2 \cdot \frac{P}{m} + \left(\frac{\lambda_9}{L}\right)^4 \cdot \frac{Ecs \cdot I_x}{m}} = (4.524 \cdot 10^3) \text{ Hz}$$

-Tempo de aquisição: $n := 1024$

$$\Delta t_1 := \frac{1}{2 \cdot f_1} = 0.009 \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_1 = 9.318 \text{ s}$$

$$\Delta t_2 := \frac{1}{2 \cdot f_2} = 0.002 \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_2 = 2.301 \text{ s}$$

$$\Delta t_3 := \frac{1}{2 \cdot f_3} = (9.963 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_3 = 1.02 \text{ s}$$

$$\Delta t_4 := \frac{1}{2 \cdot f_4} = (5.6 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_4 = 0.573 \text{ s}$$

$$\Delta t_5 := \frac{1}{2 \cdot f_5} = (3.583 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_5 = 0.367 \text{ s}$$

$$\Delta t_6 := \frac{1}{2 \cdot f_6} = (2.488 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_6 = 0.255 \text{ s}$$

$$\Delta t_7 := \frac{1}{2 \cdot f_7} = (1.827 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_7 = 0.187 \text{ s}$$

$$\Delta t_8 := \frac{1}{2 \cdot f_8} = (1.399 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_8 = 0.143 \text{ s}$$

$$\Delta t_9 := \frac{1}{2 \cdot f_9} = (1.105 \cdot 10^{-4}) \text{ s} \quad n \cdot \Delta t_9 = 0.113 \text{ s}$$