

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

CAMILA PATRÍCIA JERONYMO PINTO

**ANÁLISE DE ESTRUTURA COM INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA E
AS MOLAS DE WINKLER**

JOÃO PESSOA

2021

CAMILA PATRÍCIA JERONYMO PINTO

**ANÁLISE DE ESTRUTURA COM INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA
E AS MOLAS DE WINKLER**

Trabalho de Conclusão de Curso, na área de estruturas, como requisito parcial para conclusão do curso de Engenharia Civil da Universidade Federal da Paraíba.

Orientador: Dr. José Márcilio Filgueiras Cruz

JOÃO PESSOA

2021

Catálogo na publicação
Seção de Catalogação e Classificação

P659a Pinto, Camila Patricia Jeronymo.

Análise de estrutura com interação solo-estrutura e as molas de Winkler / Camila Patricia Jeronymo Pinto. - João Pessoa, 2021.

116 f. : il.

Orientação: José Marcílio Filgueiras Cruz.

TCC (Graduação) - UFPB/CT.

1. Interação solo-estrutura. 2. Método de Winkler. 3. Método de Elementos de Contorno. 4. Análise Matricial.

I. Cruz, José Marcílio Filgueiras. II. Título.

UFPB/BSCT

CDU 62(043.2)

FOLHA DE APROVAÇÃO

CAMILA PATRÍCIA JERONYMO PINTO

ANÁLISE DE ESTRUTURA COM INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA E AS MOLAS DE WINKLER

Trabalho de Conclusão de Curso em 15/07/2021 perante a seguinte Comissão Julgadora:

José Márcio Filgueiras Cruz APROVADO
Prof. Dr. José Márcio Filgueiras Cruz (Orientador)
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

Enildo Tales Ferreira APROVADO
Prof. Dr. Enildo Tales Ferreira (Membro)
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

Carlos A. Taurino de Lucena APROVADO
Prof. Dr. Carlos Antônio Taurino de Lucena (Membro)
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UFPB

ABSilva
Profª. Andrea Brasiliano Silva
Matrícula Siape: 1549557
Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

AGRADECIMENTOS

São tantas as pessoas que merecem o meu agradecimento que não sei por onde começar. Primeiramente, meu muito obrigada a Deus, que mesmo eu não merecendo, sempre esteve do meu lado, colocando pessoas maravilhosas para me auxiliar. Eu sempre digo que é incrível como eu não percebo o tanto de coisa boa que acontece na minha vida, mas que eu tenho certeza que é Ele. Maria, obrigada também por sempre me ouvir e acalmar desde pequena.

Obrigada mi, mãe e pai. De fato, vocês são minha base. A cada ano que se passa eu só vou confirmando como essa base familiar é importante, nós quatro sempre. Mi, meu exemplo de determinação. Mãe, meu exemplo de doação. Pai, meu exemplo de ajuda ao próximo. Obrigada mãe por ter acreditado em mim mesmo quando eu era criança e esquecia de fazer tudo. A vovô Sales (*in memoriam*), vovô Wilson (*in memoriam*), vovó Gizênia (*in memoriam*): vocês fazem falta, obrigada por eu ter tido a honra de compartilhado a vida com vocês, obrigada por terem sido exemplos para mim de fé, de bondade, de família. Vovó Dirce, a senhora é forte, a senhora é exemplo de serviço à família, a senhora é amor. Nê, obrigada por sempre ter cuidado de mim.

Minha inspiração pela área de exatas sempre foi mamãe e eu acho incrível isso. Chegando ao ensino fundamental tive um professor que sempre me incentivou muito, obrigada Francinaldo (*in memoriam*), o senhor também faz parte disso.

Quando eu digo que sou muito agraciada falo também de amizades. Obrigada Gec, Juli, Lara, Leka e Marcelinha, vocês sempre estiveram comigo. Obrigada Gabi e Ariane por terem sido minhas maiores parceiras no curso. Agradecer também à Aninha, Mari, Bárbara, Maysa e a todos do “chama Poliana”, obrigada por sempre estarem dispostos a me alegrar e ajudar. “SPD” e “desbloqueados”, Engenharia Civil não teria sido a mesma sem vocês.

Quero agradecer ao meu intercâmbio e todos os ensinamentos e amizades que ele me trouxe. Aprendi em praticamente um ano e meio o que talvez demorasse muito mais tempo para aprender. “Aqui é BR”, vocês foram essenciais.

Aceitar fazer o trabalho de conclusão de curso esse período foi um desafio, o incentivo do professor Marcílio Cruz foi fundamental para a minha decisão. Então por fim, meu muito obrigada ao senhor que sempre está disposto a transmitir o seu conhecimento com muita paciência e dedicação.

RESUMO

A estrutura é o conjunto formado pelo solo, infraestrutura e a superestrutura. O solo é a base de praticamente de toda obra civil e é um meio complexo devido à sua heterogeneidade. A infraestrutura é a estrutura que está em contato com o solo, são as fundações. E a superestrutura é a parte que está em contato direto com as ações externas. Essas três partes interagem entre si, o comportamento de uma reflete na outra. Sabendo disso, se faz necessário a análise de uma interação entre elas. A chamada e conhecida interação solo-estrutura tem como objetivo aproximar a estrutura projetada da realidade, ela faz isso considerando que os componentes da estrutura trabalham em conjunto, ela mostra, por exemplo, que o recalque que acontece no solo causa uma redistribuição de esforços em toda a estrutura. Essa análise não admite que as partes da estrutura sejam dimensionadas separadamente. Sua não consideração pode trazer resultados equivocados. Duas formas de se modelar uma estrutura considerando essa interação é através do método de Winkler com molas idênticas, independentes e igualmente espaçadas que representam o solo, e através de métodos discretos de aproximação no qual o método de elementos de contorno recebem ênfase para a modelagem em meios finitos ou semi-infinitos, por exemplo: o solo. O primeiro método citado é prático e muito difundido atualmente, porém é muito mais simplificado que segundo. Alguns programas computacionais, como o Ftool, são formulados a partir da análise matricial e consideram as molas de Winkler, quando preciso.

Palavras-chave: Interação solo-estrutura. Método de Winkler. Método de Elementos de Contorno. Análise Matricial.

ABSTRACT

The structure is the set formed by the soil, infrastructure and the superstructure. The soil is the basis of almost all civil works and is a complex environment due to its heterogeneity. The infrastructure is the structure that is in contact with the soil, it is the foundations. And the superstructure is the part that is in direct contact with external actions. These three parts interact with each other, the behavior of one reflects on the other. Knowing this, it is necessary to analyze an interaction between them. The so-called and well-known soil-structure interaction aims to bring the projected structure closer to reality, it does this considering that the components of the structure work together, it shows, for example, that the settlement that takes place in the soil causes a redistribution of efforts in the entire structure. This analysis does not admit that the parts of the structure are dimensioned separately. Your disregard can bring wrong results. Two ways to model a structure considering this interaction is through the Winkler method with identical, independent and equally spaced springs that represent the soil, and through discrete approximation methods which the boundary elements method receives emphasis for modeling in media finite or semi-infinite, for example: the soil. The first method mentioned is practical and widespread nowadays, but it is much more simplified than the second. Some computer programs, such as Ftool, are formulated based on matrix analysis and consider Winkler springs, when necessary.

Keywords: Soil-structure interaction. Winkler method. Boundary Elements Method. Matrix Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Cargas vivas e mortas	4
Figura 2 – Modelo elástico	6
Figura 3 – Modelo elástico linear.....	6
Figura 4 – Modelo plástico	7
Figura 5 – Modelo viscoso.....	8
Figura 6 – Modelo elasto-plástico perfeito - Representação física	9
Figura 7 – Gráfico tensão x deformação de um modelo elasto-plástico perfeito.....	9
Figura 8 – Modelo de Maxwell - Representação física	10
Figura 9 – Modelo visco-elástico	10
Figura 10 – Reações de solos coesivos e não coesivos em sapatas rígidas	15
Figura 11 – Superestrutura + Infraestrutura + Solo.....	21
Figura 12 – Intensidade das cargas.....	22
Figura 13 – Região do bulbo de pressões	22
Figura 14 – Interação solo-estrutura no tempo	24
Figura 15 – Influência da rigidez da estrutura	26
Figura 16 – Recalque x rigidez relativa estrutura solo	27
Figura 17 – Interação solo-estrutura com o processo construtivo.....	28
Figura 18 – Modelagem considerando o processo construtivo.....	29
Figura 19 – Modelo de Winkler e no meio contínuo.....	31
Figura 20 – Molas de Winkler	32
Figura 21 – (a) Problema, (b) Modelagem pelo MDF, (c) Modelagem pelo MEF e (d) Modelagem pelo MEC.	33
Figura 22 – Problema real e fundamental.....	36
Figura 23 – Solução fundamental com os pontos fonte e de campo	36
Figura 24 – Discretização do contorno.....	37
Figura 25 – Mola de Winkler	38
Figura 26 – Análise py.....	46
Figura 27 – Comportamento de molas lineares e não lineares	46
Figura 28 – (a) Estaca submetida a um esforço horizontal, (b) modelagem pelo método de Winkler.....	47
Figura 29 – Reação do solo impedindo o deslocamento horizontal da estaca.....	47

Figura 30 – (a) estaca em uma argila dura, (b) estaca na areia, (c) e (d) influência da largura/diâmetro da estaca na dimensão do bulbo de pressão.....	49
Figura 31 – Rigidez à rotação das sapatas	53
Figura 32 – Rigidez à rotação das estacas	54
Figura 33 – Representação de uma força aplicada na mola gerando uma deformação	56
Figura 34 – Estrutura com apoios rígidos.....	57
Figura 35 – Aplicação de molas nos apoios de um pórtico	58
Figura 36 – Barras biarticuladas para representar as molas.....	58
Figura 37 – Direções dos coeficientes de rigidez para uma barra biengastada de um pórtico	59
Figura 38 – Pórtico com um apoio elástico em uma direção.....	65
Figura 39 – Discretização do pórtico.....	66
Figura 40 – DEN e DEC do pórtico (Caso 1).....	77
Figura 41 – DMF e deformação do pórtico (Caso 1)	77
Figura 42 – Pórtico com 2 apoios totalmente vinculados.....	79
Figura 43 – DEN e DEC do pórtico (Caso 2).....	79
Figura 44 – DMF e deformação do pórtico (Caso 2)	80
Figura 45 – Pórtico com um apoio elástico em três direções	81
Figura 46 – DEN e DEC do pórtico (Caso 3).....	81
Figura 47 – DMF e deformação do pórtico (Caso 3)	82
Figura 48 – Viga biengastada sem base elástica no seu comprimento longitudinal ...	88
Figura 49 – DEC em kN da viga (Caso 1).....	88
Figura 50 – DMF em kNm da viga (Caso 1)	88
Figura 51 – Deformação em mm da viga (Caso 1)	88
Figura 52 – Viga biengastada com uma mola vertical centralizada.....	89
Figura 53 – DEC em kN da viga (Caso 2).....	89
Figura 54 – DMF em kNm da viga (Caso 2)	89
Figura 55 – Deformação em mm da viga (Caso 2)	90
Figura 56 – Viga biengastada com molas verticais espaçadas em 1 m.....	90
Figura 57 – DEC em kN da viga (Caso 3).....	90
Figura 58 – DMF em kNm da viga (Caso 3)	91
Figura 59 – Deformação em mm da viga (Caso 3)	91

Figura 60 – Viga biengastada com molas verticais espaçadas em 0,50 m	91
Figura 61 – DEC em kN da viga (Caso 4).....	92
Figura 62 – DMF em kNm da viga (Caso 4)	92
Figura 63 – Deformação em mm da viga (Caso 4)	92

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Correlação empírica com o ensaio SPT.....	40
Tabela 2 – Correlação com o CBR, módulo de reação em kgf/cm ³	41
Tabela 3 – Valores de k_s^v em KN/m ³	42
Tabela 4 – Valores de k_s^v em kN/m ³	42
Tabela 5 – Fator de influência I_w para sapatas.....	43
Tabela 6 – Correlação com o tipo de solo.....	44
Tabela 7 – Valores de n_h e m_h para argilas e solos orgânicos moles.....	51
Tabela 8 – Valores de n_h e m_h para areias, válidos para estacas de 30cm de lado**.	51
Tabela 9 – Valores** de k_{s1} em kN/cm ³ segundo Terzaghi, 1955.	52
Tabela 10 – Valores dos deslocamentos dos nós não vinculados da estrutura.....	73
Tabela 11 – Valores dos esforços dos nós vinculados da estrutura.....	73
Tabela 12 – Valores de esforços e dos deslocamentos dos nós da estrutura.....	74
Tabela 13 – Comparativo de resultados dos esforços de apoio do pórtico.....	78
Tabela 14 – Comparativo de resultados dos esforços internos das barras.....	78
Tabela 15 – Esforços dos nós da estrutura.....	82
Tabela 16 – Deformações dos nós das estruturas.....	83
Tabela 17 – Caso 1: com K_x	85
Tabela 18 – Caso 2: sem base elástica.....	85
Tabela 19 – Caso 3: com K_x , K_y , K_z	85
Tabela 20 – Comparativo das reações e deformações.....	92

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. JUSTIFICATIVA.....	2
3. OBJETIVOS	2
4. METODOLOGIA	2
5. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	3
5.1. SISTEMA ESTRUTURAL	3
5.1.1. Solo	3
5.1.2. Infraestrutura	4
5.1.3. Superestrutura.....	4
5.2. MODELOS REOLÓGICOS.....	5
5.2.1. Modelos básicos.....	5
5.2.2. Modelos combinados	8
5.3. VARIAÇÃO DA TENSÃO DO SOLO	10
5.3.1. Incertezas no solo.....	11
5.3.2. Ações nas redondezas	11
5.4. FUNDAÇÕES.....	13
5.4.1. Fundações superficiais e profundas	14
5.4.2. Fundações rígidas e flexíveis.....	14
5.5. RECALQUES EM SAPATAS	16
5.6. CAPACIDADE DE CARGA ESTRUTURAL E GEOTÉCNICA.....	17
5.7. INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA - ISE	18
5.8. EFEITOS DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA.....	23
5.9. INFLUÊNCIA NA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA.....	24
5.9.1. Influência do tempo	24
5.9.2. Influência da rigidez da estrutura	25

5.9.3. Rigidez relativa estrutura-solo.....	26
5.9.4. Influência do processo construtivo	27
5.10. DIFICULDADES PARA A MODELAGEM DA INTERAÇÃO SOLO ESTRUTURA	29
5.11. MODELOS DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA.....	30
5.11.1. Modelo de Winkler	31
5.11.2. Métodos discretos de aproximação	33
5.12. COEFICIENTE DE MOLA.....	37
5.12.1. Coeficiente de mola vertical	37
5.12.2. Coeficiente de mola horizontal.....	45
5.12.3. Coeficiente de mola rotacional	53
6. ANÁLISE DE UM PÓRTICO CONSIDERANDO APOIO ELÁSTICO ...	54
6.1. MÉTODO MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS.....	54
6.1.1. Coeficientes de rigidez.....	58
6.2. ETAPAS DE CÁLCULO.....	60
6.3. ANÁLISE DA ESTRUTURA 1 – PÓRTICO.....	64
6.3.1. Caso 1 – Análise matricial.....	65
6.3.2. Caso 2.....	79
6.3.3. Caso 3.....	80
6.3.4. Comparativo de resultados dos 3 casos.....	82
7. ANÁLISE DE UMA VIGA CONSIDERANDO APOIO ELÁSTICO	86
7.1. Caso 1: sem molas.....	87
7.2. Caso 2: com uma mola vertical centralizada	88
7.3. Caso 3: com várias molas verticais espaçadas em 1m	90
7.4. Caso 4: com várias molas verticais espaçadas em 0,50 m	91
7.5. Análise de resultados.....	92
8. CONCLUSÃO	94

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95
Anexo A	101
Anexo B	104

1. INTRODUÇÃO

Ter conhecimento do comportamento do solo, da infraestrutura e da superestrutura é um fator imprescindível em um projeto. Porém apenas isso não é suficiente, em muitos casos. Como esses três componentes da estrutura atuam em conjunto na realidade, eles também precisam ser analisados, previamente, da mesma forma.

A interação solo-estrutura estudará a relação que essas três partes têm entre si e como elas são interligadas. Quando há alteração em uma, a outra será diretamente afetada através da redistribuição de esforços e recalques na estrutura.

Em 1953, Meyerhof já alertava sobre o assunto de interação solo estrutura. Além de ele ter discutido sobre a capacidade de carga das fundações, ele também estudou sobre a previsão de recalques das estruturas levando em consideração, nos seus cálculos, o solo, a fundação e a rigidez da estrutura.

Logo, a interação solo-estrutura será importante para deixar os esforços e recalques mais bem distribuídos na estrutura. Através dessa análise, são feitas modelagens até que a estrutura esteja bem dimensionada e com uma previsão de comportamento estrutural próximo da realidade.

Antigamente, esse estudo se tornava inviável devido à falta de ferramentas que facilitassem o processo, porém com a chegada de programas computacionais que facilitam e tornam os cálculos bem mais rápidos, a interação solo-estrutura passa a ser um requisito importante para o dimensionamento.

Apesar de a representação do solo ser complexa devido à sua heterogeneidade, alguns métodos desenvolvidos são eficazes e adotam hipóteses que satisfazem. O modelo de Winkler representa o solo com molas idênticas e igualmente espaçadas a fim de representar o solo como um meio elástico. É um método mais simplificado que os métodos discretos de aproximação, com foco para o método de elementos de contorno, muito adequado para meios infinitos e semi-infinitos.

Autores, como Lopes e Gusmão (1991), viram, em seus estudos, que com a consideração dessa interação não só os recalques absolutos, mas, principalmente, os diferenciais são afetados. Os recalques mudando, há a redistribuição de esforços da estrutura.

2. JUSTIFICATIVA

A engenharia cada vez mais oferece meios computacionais eficientes para que processos de cálculo sejam realizados com mais precisão e velocidade. Fazer a interação solo-estrutura podia ser considerado inviável, antigamente, porém com todo esse avanço tecnológico dos últimos tempos, é possível considerá-la e estudá-la em diversos problemas.

Ainda hoje em dia, a infraestrutura e a superestrutura são calculadas de maneira isolada. O projetista estrutural considera o solo como sendo um apoio indeslocável enquanto o projetista de fundações dimensiona sua estrutura no solo levando em consideração as reações de apoio fornecidas pelos calculistas estruturais.

Porém, principalmente para obras de grande porte, essa forma isolada de projetar pode levar à uma interpretação equivocada da estrutura pois a interação solo-estrutura pode causar uma redistribuição de esforços fazendo com que tenha mudanças significativas no projeto.

3. OBJETIVOS

Os objetivos deste trabalho foram:

- a) Compreender conceitos bases relacionados ao solo, à infraestrutura e à superestrutura;
- b) Compreender os efeitos da interação solo-estrutura;
- c) Compreender a diferença entre os métodos discretos, em especial o método dos elementos de contorno, e o modelo de Winkler;
- d) Modelar um pórtico com mola via análise matricial. Compará-lo com os resultados obtidos no FTool;
- e) Modelar uma viga com e sem interação solo-estrutura. Nesse elemento também será analisado o que o acréscimo de molas na modelagem acarreta nos resultados, ou seja, será feito um refinamento da estrutura.

4. METODOLOGIA

Primeiramente, na revisão bibliográfica, foram explicados conceitos bases para o tema interação solo-estrutura. O solo e suas características bem como as estruturas terão que ser bem entendidas para que a interação entre eles, incluindo efeitos provenientes dela, fique clara.

Conhecendo os efeitos da interação, o trabalho avaliou estruturas com e sem interação solo-estrutura, comparou os resultados e observou como essa consideração age na redistribuição de esforços. Todos os modelos que foram desenvolvidos seguem o que a bibliografia do trabalho explicou. Hipóteses, cálculos e decisões foram tomados de acordo com o que foi explanado no desenvolvimento do trabalho.

Em seguida, a análise matricial da estrutura com apoios elásticos foi explanada e então uma estrutura com mola em uma direção foi resolvida por análise matricial, o resultado obtido foi comparado com o resultado do programa FTool. Após isso, mais molas em outras direções foram aplicadas na estrutura para que os efeitos causados por elas fossem observados.

Partindo para mais uma análise estrutural, uma viga foi analisada sem interação solo-estrutura e depois com a interação. Também foi observado como o refinamento de análise pode impactar o resultado.

5. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

5.1. SISTEMA ESTRUTURAL

Normalmente a estrutura é subdividida em superestrutura e infraestrutura. A primeira é a estrutura principal, é a que todo mundo vê, já a segunda é a que se encontra no interior do solo, é a fundação. Além disso, há o solo que será a sustentação de toda a estrutura.

5.1.1. Solo

Para a Engenharia Civil, o solo representa a base de sustentação das obras. Apesar disso, o solo é um material muito desconhecido por conta da sua complexidade e variabilidade. Isso por si só é um motivo para que o fator de segurança (FS) utilizado nos cálculos das fundações sob compressão serem altos. A NBR 6122 fornece valores de FS=3,0, para fundações superficiais e FS=2,0 para as profundas. Esses valores são considerando que o método de obtenção da resistência é através de métodos analíticos ou semiempíricos.

O solo é a base de praticamente toda obra civil, é ele o responsável por absorver a carga vinda da superestrutura. É de fundamental importância que os profissionais da

engenharia deem devida atenção a este material, pois tendo ele muitas incertezas, todas as precauções necessárias e possíveis devem ser tomadas.

5.1.2. Infraestrutura

A infraestrutura é a parte estrutural enterrada no solo, é a estrutura que tem contato direto com o maciço de solo e que vai transportar todo o carregamento vindo da superestrutura para o mesmo. A infraestrutura compreende as fundações superficiais, como sapatas e blocos de fundação, e profundas, como estacas e tubulões.

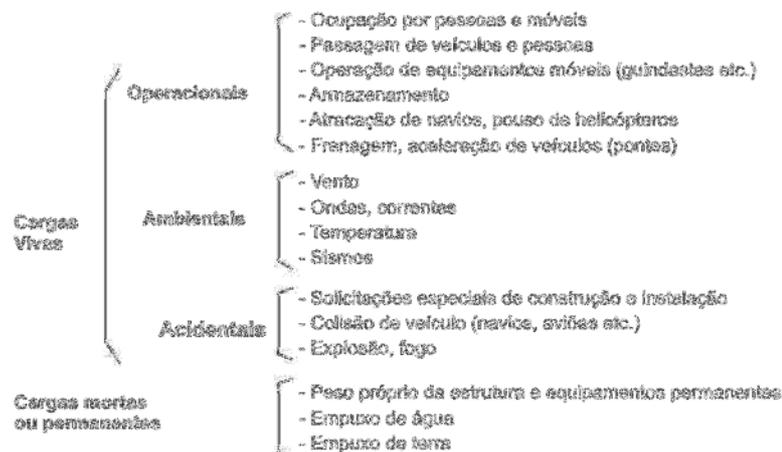
A sua análise para cálculo de dimensionamento deve considerar as combinações de estados limites últimos e de serviços advindos da superestrutura bem como ações vindas do próprio solo, como empuxos e sismos, por exemplo.

5.1.3. Superestrutura

A superestrutura é a parte que normalmente está em contato com o exterior, é a estrutura acima do solo. A sua análise para cálculo deve considerar as ações permanentes (peso próprio, sobrecargas, empuxos permanentes, retração do concreto, fluência do concreto, deslocamento do apoio, imperfeições), ações variáveis (sobrecargas variáveis, vento, água, temperatura, impactos), ações excepcionais e analisar também a interação solo-estrutura.

Velloso e Lopes (2010) separam as solicitações que uma estrutura está sujeita em dois grupos: cargas vivas e cargas mortas, como mostrado na figura 1.

Figura 1 – Cargas vivas e mortas



Fonte: Velloso e Lopes (2010)

A NBR 8681 estabelece combinações dessas cargas que devem ser feitas para a verificação dos estados limites da estrutura que são:

- O estado limite último (ELU), que diz respeito ao colapso parcial ou total da estrutura;
- O estado limite de serviço (ELS), que diz respeito a fissuras, deformações e que pode comprometer a utilização da construção.

Esses dois estados limites devem ser analisados e respeitados para que a construção venha proporcionar segurança e apresente um bom desempenho de utilização.

5.2. MODELOS REOLÓGICOS

Quando o maciço de solo é solicitado, ele começa a sofrer deformações que irão variar de acordo com a intensidade da carga que está sendo aplicada e do comportamento e características do maciço de solo.

A variabilidade e comportamento do material dificulta o processo para estabelecer um modelo de relação tensão-deformação adequado ao solo em questão. Proença (1986) propõe a utilização de vários modelos, para um único material, que seriam escolhidos de uma forma que simulasse o comportamento mais próximo da realidade.

Para se aproximar da realidade de um modelo reológico do solo é necessário combinar os modelos básicos existentes. Os modelos básicos serão o elástico, plástico e viscoso e os modelos combinados que, segundo Reis (2000) são os que mais se aplicam ao estudo do comportamento do concreto e do solo, serão o elasto-plástico e o visco-elástico.

5.2.1. Modelos básicos

Reis (2000) cita que os modelos básicos são os que consideram que a tensão é linearmente dependente da deformação, que a tensão é constante com a deformação e que a tensão é linearmente dependente da velocidade de deformação.

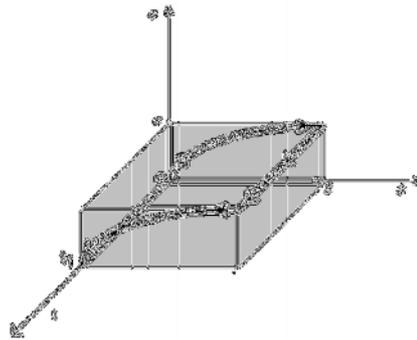
5.2.1.1. Modelo elástico

Esse modelo admite que um corpo é solicitado por uma carga e sofre deformações imediatas que irão permanecer constantes durante o tempo que o carregamento ocorrer.

Também é considerado que as deformações são totalmente reversíveis quando cessado o carregamento, como mostrado na figura 2. A sua representação física é uma mola, o seu coeficiente de rigidez K irá caracterizar as propriedades físicas do material (REIS, 2000).

$$\sigma = K \cdot \varepsilon \quad (1)$$

Figura 2 – Modelo elástico

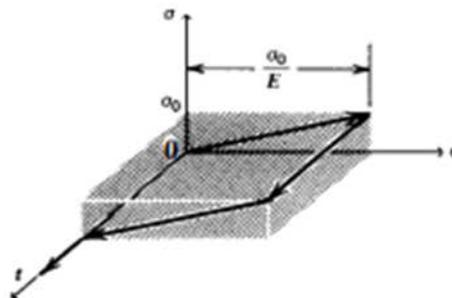


Fonte: Reis (2000)

Se o coeficiente de rigidez K do material for constante, o K recebe o nome de Módulo de Elasticidade E , expressando então a lei de Hooke. A figura 3 mostra este modelo. A representação física do modelo elástico é uma mola.

$$\sigma_m = E \cdot \varepsilon \quad (2)$$

Figura 3 – Modelo elástico linear



Fonte: Reis (2000)

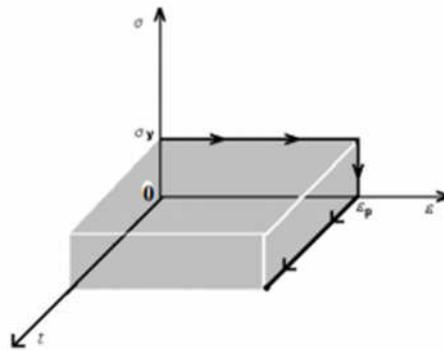
5.2.1.2. Modelo plástico

O modelo plástico admite que um corpo é solicitado e não sofre deformações até que se chegue à tensão de escoamento que é um limite de tensão, σ_y . Depois desse limite, o material se deforma de maneira ilimitada e irreversível como mostrado na figura 4.

$$\sigma < \sigma_y \rightarrow \varepsilon = 0 \quad (3)$$

$$\sigma = \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_p \quad (4)$$

Figura 4 – Modelo plástico



Fonte: Reis (2000)

A representação física do modelo plástico é um corpo sólido que escorrega em uma superfície com atrito. A tensão que é necessária para vencer o atrito é chamada a tensão de escoamento.

5.2.1.3. Modelo viscoso

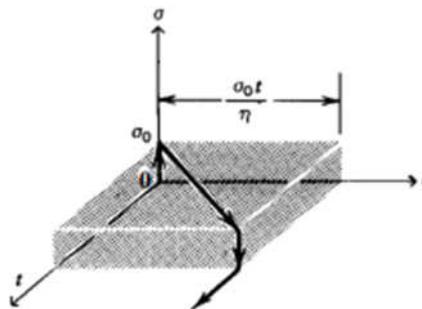
O modelo plástico admite que um material submetido a um esforço constante ou não, sofrerá deformações que vão variar no decorrer do tempo. Caso o material seja descarregado a deformação ocorrida é irreversível, como mostrado na figura 5. A representação física do modelo viscoso é um amortecedor.

$$\sigma_{eb} = \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (5)$$

Onde η é a viscosidade do material.

“Em um caso onde ocorra **tensão constante**, a velocidade de deformação é constante, portanto, a **deformação cresce linearmente com o tempo**. No descarregamento, ou seja, tensão igual zero, a velocidade de deformação é nula, logo a **deformação torna-se constante com o tempo**.” (REIS, 2000, grifo do autor).

Figura 5 – Modelo viscoso



Fonte: Reis (2000)

5.2.2. Modelos combinados

Com o objetivo de reproduzir o comportamento do solo de uma forma mais próxima da realidade, os modelos básicos são combinados formando os modelos compostos.

5.2.2.1. Modelo elasto-plástico

Como o próprio nome diz esse modelo reológico associa o modelo elástico com o plástico. O modelo elástico é representado por uma mola com o coeficiente de rigidez igual ao módulo de elasticidade E , tornando o comportamento tensão-deformação do material linear. Quando se ultrapassa a tensão limite, a tensão de escoamento σ_y , a deformação torna-se irreversível.

O arranjo em série, simula a deformação do modelo elasto-plástico perfeito. É colocado um elemento de mola do modelo elástico em série a um elemento de atrito do modelo plástico, ver figura 6.

Figura 6 – Modelo elasto-plástico perfeito - Representação física



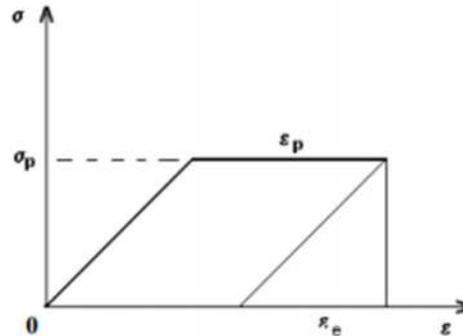
Fonte: Reis (2000)

Nesse arranjo, a tensão age igualmente na mola e no elemento de atrito. A deformação, por sua vez, é a soma da deformação elástica com a plástica. Quando a tensão é menor que a de escoamento, a deformação corresponderá apenas à parcela elástica. Quando a tensão atinge ou ultrapassa a de escoamento, a deformação passa a ser a soma da deformação elástica com a plástica. A figura 7 mostra um gráfico tensão x deformação para este modelo.

$$\sigma < \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e \quad (6)$$

$$\sigma \geq \sigma_y \rightarrow \varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (7)$$

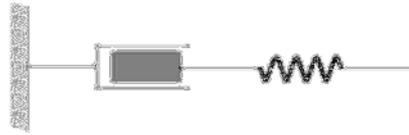
Figura 7 – Gráfico tensão x deformação de um modelo elasto-plástico perfeito



Fonte: Reis (2000)

5.2.2.2. Modelo visco-elástico

Esse modelo normalmente é utilizado em problemas de fluência e de relaxação. É a associação do modelo viscoso com o elástico. O material ao receber carga constante vai se deformar ao longo do tempo (fluência) e o material sofrendo uma deformação constante, sofre um alívio de tensões em função do tempo, ver figura 9. O arranjo em série de Maxwell coloca em série a mola do modelo elástico e o amortecedor do modelo viscoso, ver figura 8.

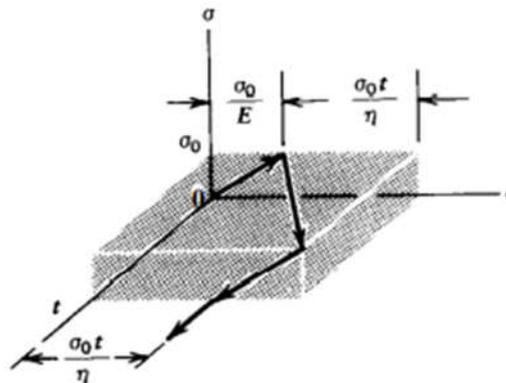
Figura 8 – Modelo de Maxwell - Representação física

Fonte: Reis (2000)

As tensões atuantes nesses dois elementos são iguais e a deformação é a soma da deformação da mola com a do amortecedor.

$$\sigma = \sigma_m = \sigma_{eb} \quad (8)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_{eb} \quad (9)$$

Figura 9 – Modelo visco-elástico

Fonte: Reis (2000)

5.3. VARIAÇÃO DA TENSÃO DO SOLO

O primeiro passo antes do dimensionamento da infraestrutura é a análise do solo. Vale ressaltar que o solo é um meio heterogêneo e que não é conhecido em sua totalidade. Através de ensaios chega-se a um modelo de maciço que servirá como base para o dimensionamento da infraestrutura.

O ensaio *in situ* mais difundido no Brasil é a sondagem SPT (*Standard Penetration Test*), é um ensaio pontual que mostra a resistência de cada camada do solo investigado. Com o ensaio SPT, além de ser possível calcular a resistência, detecta-se também o tipo de solo através da caracterização tati-visual e se há ou não a presença do lençol freático ou de uma possível água represada. Assim, com esses dados em mãos, projeta-se a infraestrutura.

Como os ensaios são pontuais, não se tem uma visão total do solo e suas características, gerando incertezas na análise. Além dessas incertezas, as ações que ocorrem nas redondezas da obra podem gerar alterações nas tensões antes previstas para cálculo.

5.3.1. Incertezas no solo

5.3.1.1. Matacão

Matacões são fragmentos de rochas que podem ser confundidos com uma rocha sã, íntegra. Essa confusão pode gerar erros graves, pois uma rocha sã é um apoio indeslocável, já o matacão, é um fragmento de rocha de rigidez elevada, mas que pode estar apoiado em um solo de resistência baixíssima levando a um erro de dimensionamento de fundação e acarretando, conseqüentemente, problemas estruturais.

A Sondagem SPT não ultrapassa, naturalmente, matacões e blocos de rochas (VELLOSO e LOPES, 2010). O ensaio que analisa as características e resistência da rocha é a sondagem rotativa.

5.3.1.2. Vazios

A presença de rochas calcárias, por exemplo, pode gerar vazios no solo. Esses vazios podem ser detectados pela sondagem SPT e precisam ser identificados para que soluções corretas sejam adotadas evitando descalçamento de sapatas e fuga de concreto em estacas. É uma incerteza no solo que se estiver presente e não for detectada, pode diminuir a capacidade resistente da infraestrutura gerando patologias.

5.3.2. Ações nas redondezas

Fatores que podem afetar as tensões no solo e conseqüentemente a capacidade de suporte da infraestrutura:

5.3.2.1.Rebaixamento de lençol freático

O lençol freático é um curso de água no subsolo. Ele pode se aproximar da superfície em épocas chuvosas e se distanciar da superfície em períodos secos. Essa mudança de nível gera mudanças de poro-pressão no solo. Essa modificação de tensão efetiva irá então afetar a tensão no solo o que pode acarretar recalques absolutos, diferenciais e rotacionais mais elevados do que os previstos.

Se com fenômenos naturais, como a chuva, o nível de água muda, o rebaixamento do lençol freático é um processo mais invasivo no solo. Quando não é bem executado pode trazer perigo à obra e à sua vizinhança. À medida que se rebaixa o lençol freático de uma obra, é rebaixado também em obras vizinhas na proximidade. Sendo assim, estruturas já projetadas na proximidade podem receber uma mudança de poro-pressão excessiva, conseqüentemente uma tensão no solo modificada para as quais a estrutura não foi projetada. Se isso acontece, patologias poderão surgir.

5.3.2.2.Sobreposição de bulbo de tensão

Bulbo de tensão é a região do solo que está ocorrendo a dissipação da carga proveniente da superestrutura. Quanto menor a capacidade de suporte do solo, maior será a área de solo necessária para suportar essa pressão da superestrutura e, conseqüentemente, maior será o seu bulbo de tensão.

Quando um bulbo de tensão de estaca se sobrepõe ao de outra, o ponto de encontro desses bulbos é a região onde uma estaca está tirando a capacidade de carga da outra. Nessa região de encontro, a dissipação das cargas das duas estacas está ocorrendo. Para que isso seja evitado, a NBR 6122:2019 indica espaçamentos mínimos entre elementos de fundações.

5.3.2.3.Aterros

Normalmente, são camadas sem resistência e que se servirem de apoio para uma fundação trarão, possivelmente, recalques excessivos. O problema de quando uma estrutura é apoiada parte em aterro e parte em solo de boa resistência é que o recalque absoluto na área aterrada será muito mais elevado que o do solo boa capacidade de carga levando a recalques

diferenciais e rotacionais significativos. Além disso, o processo de consolidação do aterro é distinto e gera recalques diferenciais.

5.3.2.4.Outros

Outras ações variáveis que podem vir a alterar o estado de tensão do solo e que devem ser previamente analisadas são: tráfego de veículos pesados que podem gerar vibrações na estrutura, explosões, enchentes, sismos, escavações em obras vizinhas etc.

5.4. FUNDAÇÕES

Após a análise das características e tensões do solo, a fundação é o pontapé inicial para o bom desempenho da estrutura como um todo. Será essa infraestrutura a responsável por receber todas as cargas, em todas as direções, enviadas pela superestrutura. O solo, por sua vez, será protagonista também durante toda a vida útil da edificação, é ele que vai receber toda a carga recebida pela infraestrutura. Logo, a carga percorre a superestrutura, passa pela infraestrutura e é dissipada no solo ou maciço rochoso. Esse conjunto solo-infraestrutura-superestrutura garantirá o equilíbrio e toda a estabilidade desejada na edificação.

A análise geotécnica para o dimensionamento da infraestrutura deve considerar as ações provenientes da superestrutura, ações decorrentes do terreno (empuxos de terra, empuxos de sobrecargas no solo), ações devido ao nível do lençol freático, peso próprio, atrito negativo, ações variáveis especiais (descritas no item 5.1.3), ações devido ao efeito de grupo de estacas e deve-se fazer também a análise da interação solo-estrutura.

As fundações podem ser classificadas quanto à profundidade e forma de dissipação de carga para o solo em rasas/ superficiais ou profundas e quanto ao comportamento estrutural em rígidas ou flexíveis.

A capacidade de carga das fundações pode ser encontrada através de:

- Prova de carga sobre placas (para análise de fundações rasas): é uma prova de carga, normalmente realizada no assentamento da sapata, que dará a capacidade real do solo naquela cota. É normatizada pela ABNT NBR 6489.

Nem sempre é necessário fazer o ensaio de placa para dimensionar uma fundação superficial. Ele é muito utilizado para otimizar projetos de fundações superficiais pois é um ensaio que permite encontrar o coeficiente de reação vertical do solo, o chamado coeficiente de mola vertical. Basicamente, a prova de carga sobre placa consiste em a

cada aplicação de carga, é medido o recalque que foi gerado. Isso é repetido até o limite de ruptura do solo, fazendo assim um gráfico para representar essa relação de tensão e deformação.

- Prova de carga estática e dinâmica (para análise de fundações profundas).
- Métodos teóricos: para a utilização desse método é necessário vários parâmetros geotécnicos. Emprega-se métodos analíticos como a teoria de capacidade de carga de Terzaghi.
- Métodos semi-empíricos: correlacionam resultados obtidos em ensaios de campo (ex: SPT, CPT, sondagem rotativa...) com as tensões admissíveis do solo. É o método mais utilizado no dia a dia dos projetistas brasileiros. Ex: Método Aoki-Velloso (1975 e 1988), Método Décourt-Quaresma (1996).

5.4.1. Fundações superficiais e profundas

Fundação rasa (direta ou superficial): “elemento de fundação cuja base está assentada em profundidade inferior a duas vezes a menor dimensão da fundação, recebendo aí as tensões distribuídas que equilibram a carga aplicada [...]” (NBR 6122:2019). Toda a carga vinda da superestrutura é transmitida ao solo pela base da fundação. Ex: sapatas isoladas, sapatas corridas, radiers, blocos.

Fundação profunda: “elemento de fundação que transmite a carga ao terreno ou pela base (resistência de ponta) ou pela superfície lateral (resistência de fuste) ou por uma combinação das duas, sendo sua ponta ou base apoiada em uma profundidade superior a oito vezes a sua menor dimensão em planta e no mínimo 3,0 m [...]” (NBR 6122:2019). Ex: estacas e tubulões.

5.4.2. Fundações rígidas e flexíveis

Neste tópico será explicado sobre sapatas e blocos de coroamento rígidos e flexíveis. Sapata, como antes explicitado, é um tipo de fundação rasa. O bloco de coroamento, por sua vez, é o elemento que irá coroar as estacas e tubulões, é ele quem vai garantir a transmissão das cargas vindas da superestrutura para as fundações profundas.

Em uma análise geométrica, a sapata e o bloco de coroamento são considerados rígidos se respeitarem, nas duas direções (x,y), a expressão abaixo. Caso contrário, são considerados flexíveis (NBR 6118:2014).

$$h \geq \frac{(a - a_p)}{3} \quad (10)$$

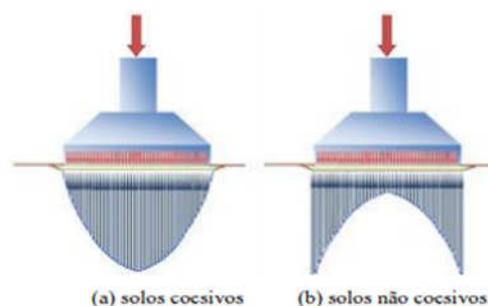
Onde h é a altura da sapata ou bloco de coroamento, a é a dimensão da sapata ou bloco de coroamento em uma determinada direção e a_p é a dimensão do pilar na mesma direção.

Sapatas rígidas são aquelas que consideram deformações uniformes no solo, na sua interface, ou seja, são aquelas que recalcam como um todo. Para sapatas rígidas, admite-se uma distribuição plana de tensões normais na interface sapata-solo, porém a reação do solo não se dá da mesma forma. Como elas são um corpo rígido, as deformações por flexão são desconsideradas.

Assim como a sapata rígida, o bloco de coroamento rígido também é considerado com um corpo rígido. Os elementos estruturais que receberão as suas cargas são as estacas e tubulões. Sendo ele rígido, a distribuição de tensão é a mesma nas estacas, a carga será igualmente distribuída. Sapatas e blocos de coroamento rígidos se comportam como corpo rígido nos deslocamentos e movimentos de translação em todas as direções. A figura 10 representa as reações de solos coesivos e não coesivos em sapatas rígidas.

“As sapatas rígidas são aquelas cujas deformações por flexão não são consideradas, enquanto nas flexíveis estas deformações não podem ser desprezadas” (CRUZ, 2012; p.116).

Figura 10 – Reações de solos coesivos e não coesivos em sapatas rígidas



Fonte: Cruz (2012)

Sapatas flexíveis deformam o solo de uma maneira que não é uniforme, porém a reação do solo à essa pressão na interface sapata-solo é uniforme (TEIXEIRA e GODOY, 1998, DORIA, 2007, BRAJA, 2007, apud CRUZ, 2012). Para blocos de coroamento flexíveis, a análise passa a ser ainda mais complexa. Como eles se deformam com as solicitações, a distribuição de cargas entre as estacas não será a mesma, sendo necessária a utilização de softwares que trabalham com métodos numéricos.

5.5. RECALQUES EM SAPATAS

Existem três tipos de recalque, o recalque absoluto que é aquele que se refere ao deslocamento integral vertical que ocorre em um apoio ou em toda a estrutura, o recalque diferencial que é a diferença entre os recalques absolutos de dois apoios de fundação e o recalque distorcional angular que é a relação entre a diferença de recalques absolutos (recalque diferencial) e a distância entre os apoios.

Segundo Velloso e Lopes (2010), os recalques ocorrem em duas etapas. A primeira etapa é aquela que compreende o recalque logo após o carregamento da estrutura, o recalque imediato. A segunda etapa compreende o recalque que ocorre ao longo do tempo. Seguindo essa linha de pensamento, o recalque final é expresso conforme a equação (11).

$$w_f = w_i + w_t \quad (11)$$

Onde w_i é o recalque imediato e w_t , o recalque ao longo do tempo.

Velloso e Lopes (2010) também falam que o recalque ao longo do tempo é decorrente do adensamento e a fenômenos viscosos ou fluência.

$$w_t = w_a + w_v \quad (12)$$

Onde w_a é o recalque devido ao adensamento e w_v , o recalque devido à fluência ou fenômenos viscosos.

Cintra et al. (2011) cita que no recalque imediato não há a diminuição de volume e vazios no solo, assim, ele pode ser determinado pela teoria de elasticidade linear. O recalque imediato é muito importante nos solos arenosos e deve-se dar uma devida importância também para solos argilosos não saturados.

O recalque por adensamento ocorre de forma mais lenta, é devido à expulsão dos vazios e da água presentes no solo. Como o adensamento é ligado à permeabilidade, solos com baixa permeabilidade, como as argilas, deixam esse processo mais lento, pois irá levar mais tempo para que a água e o ar sejam expulsos. É por essa razão que o recalque por adensamento é muito importante de ser analisado em solos argilosos.

Por fim, o recalque devido à fluência é o que ocorre sob tensão constante. Argilas muito moles e marinhas devem receber uma análise especial no estudo desse recalque.

- Para solos em geral (areias, siltes e argilas não saturadas): $w_f \approx w_i$;
- Para argilas saturadas: $w_f = w_i + w_a$;
- Para argilas muito moles ou marinhas: $w_f = w_i + w_a + w_v$.

A importância de identificar o tipo de solo, as camadas e suas respectivas profundidades é um dos fatores que influenciará a forma de distribuição de pressões de contato e, conseqüentemente, da sua deformação. Solos arenosos possuem uma distribuição diferente dos solos argilosos, por exemplo. Outro fator que influencia nisso é a rigidez da estrutura (superestrutura e infraestrutura), se ela é flexível, quase flexível, quase rígida, rígida, infinitamente rígida.

O método de cálculo dos recalques não é o foco deste trabalho, porém para compreender a interação solo estrutura e como se dá a sua redistribuição de esforços, faz-se necessário estudar essas deformações verticais que ocorrem em toda estrutura.

5.6. CAPACIDADE DE CARGA ESTRUTURAL E GEOTÉCNICA

A capacidade de carga de um elemento de fundação profunda, por exemplo, pode ser analisada de duas formas: resistência geotécnica e resistência estrutural.

A resistência geotécnica é a capacidade de carga promovida pela interface solo-estrutura, ou seja, é a capacidade de transmitir a carga vinda da superestrutura para o solo e vai depender do tipo de solo e sua respectiva resistência. A fundação profunda absorve a carga solicitante e dissipa por atrito ao longo do fuste da estaca (resistência lateral) e pela ponta através da base da estaca (resistência de ponta).

Já a resistência estrutural do elemento de fundação profunda é quanto o elemento suporta sem romper, ela é relacionada com o diâmetro da estaca. Para que você utilize a capacidade de carga estrutural como limitante é necessário que o elemento de fundação esteja

apoiado em um apoio indeslocável, rígido, impenetrável. Nesse caso, a fundação trabalhará como um pilar e levará em consideração a resistência do elemento estrutural.

Normalmente a capacidade de suporte estrutural é maior que a geotécnica tornando assim a capacidade de suporte geotécnica como capacidade limitante. Como a capacidade suporte geotécnica é ligada a interface solo-estrutura, duas estacas de mesmo diâmetro e mesma profundidade, mas em solos diferentes, terão capacidades de cargas distintas. Isso leva a concluir e reafirmar a importância do estudo da interface solo-estrutura.

5.7. INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA - ISE

Mota (2009) cita que os precursores da metodologia de análise com a consideração da interação solo-estrutura foram os trabalhos de Meyerhof, em 1953, e de Chamecki, em 1954.

Meyerhof (1953, apud Mota, 2009) em seu trabalho mostrou que o solo, a infraestrutura e a superestrutura podiam ser estudados de forma integrada para se estimar os recalques totais e diferenciais das fundações. Para isso, as características do solo e a rigidez da estrutura deveriam ser consideradas. Ele viu que os recalques totais não eram tão afetados pela rigidez da estrutura quanto os diferenciais, pois estes últimos dependiam do tipo de rigidez da estrutura e da variação das características do solo.

O autor se baseou no fato que a rigidez da infraestrutura é bem menor que o da superestrutura e desenvolveu expressões que estimam a rigidez de estruturas rígidas abertas ou fechadas com alvenarias de vedação. Além disso, ele também propôs expressões que tornam possível substituir uma edificação real por uma mais simples de rigidez equivalente.

No Brasil, Chamecki (1954, apud Mota, 2009) apresentou um trabalho com o tema interação solo-estrutura no 1º Congresso Brasileiro de Mecânica dos Solos. Ele elaborou o processo iterativo que consiste, de forma resumida, em, primeiramente, calcular as reações de apoio de uma estrutura considerando-os indeslocáveis e dizendo que há coeficientes de transferência de carga. Esses coeficientes são as reações verticais desses apoios que são obtidas através de recalques unitários de cada apoio separado. Em seguida, calculam-se os recalques para esses apoios. O processo iterativo então se inicia e considerando a rigidez da estrutura, são fornecidas as novas reações de apoio e os novos recalques. O processo se finaliza quando os valores de reações de apoio e recalques convergirem entre si. Esse estudo também observou que a rigidez da estrutura influencia e acentua os recalques diferenciais.

Além de diminuí-los, eles são mais próximos da realidade quando comparados aos métodos convencionais (MOTA, 2009).

Poulos e Davis (1968, apud Mota, 2009) estudou uma estaca cilíndrica incompressível e isolada, submetida à uma carga axial, no meio semi-infinito, isotrópico e homogêneo. Os autores usaram a solução de Mindlin para calcular os deslocamentos verticais da estaca. As integrais foram resolvidas ao longo de seu contorno, de forma analítica e numérica.

Ainda no mesmo ano, Poulos estudou um grupo de estacas. Ele estudou a interação de duas estacas idênticas, com carregamento parecidos e depois aplicou o método desenvolvido em um grupo de estacas. Ele considerou a superposição elástica da influência dos elementos do grupo, sempre estudando de dois em dois elementos.

Em 1971, Poulos, também utilizando as equações de Mindlin para representar o solo e o método das diferenças finitas para discretizar as estacas, estudou uma estaca submetida a um momento e a uma força horizontal. E em 1975, ele desenvolveu uma metodologia de cálculo baseada em cálculo matricial para estimar recalques de fundações considerando a interação solo-estrutura.

Entendida toda complexidade da superestrutura, infraestrutura e solo, agora será necessário analisar como essas partes se comportam em conjunto.

Infelizmente, um procedimento ainda muito recorrente nos projetos é calcular a superestrutura de forma separada da infraestrutura. Apesar de ser uma prática comum pode levar a análises equivocadas. Quando se analisa a superestrutura de forma independente, considera-se que o apoio da estrutura é engastado, infinitamente rígido, indeslocável em todas as direções.

O recalque é um deslocamento vertical que está presente em todas as estruturas. Os engenheiros devem controlar esse recalque de uma forma que ele não venha gerar diminuição de segurança, vida útil e qualidade da estrutura. A análise de interação solo-estrutura admite que o deslocamento ocorre e analisa como ele afetará a estrutura.

Se o calculista projeta uma estrutura em apoio indeslocável, ou seja, em um solo que não sofrerá deslocamento, as reações que são encontradas não serão as que ocorrerão na prática. Isso se deve ao fato de que quando um deslocamento ocorre, há uma redistribuição de esforços na estrutura.

A interação solo-estrutura entra nessa redistribuição de esforços. O projetista estrutural entra em contato com o projetista geotécnico e toma conhecimento qual a rigidez do apoio ou dos apoios e qual seria o deslocamento previsto em cálculo na infraestrutura. Com essa

informação, o calculista estrutural recalcula a estrutura considerando as informações passadas pelo projetista da infraestrutura. O processo se repete algumas vezes, as chamadas iterações são feitas, até que se chegue a uma convergência de recalques ou esforços na estrutura. Quando os deslocamentos gerados pela estrutura não gerarem uma redistribuição de esforços muito grande, o processo de iterações é finalizado e a estrutura se aproxima da realidade.

É um fato que, na prática, não será toda estrutura que demandará um estudo mais profundo sobre a interação solo-estrutura, a experiência do engenheiro é de fundamental importância nesse momento. Normalmente a interação solo-estrutura é feita em obras de grande porte.

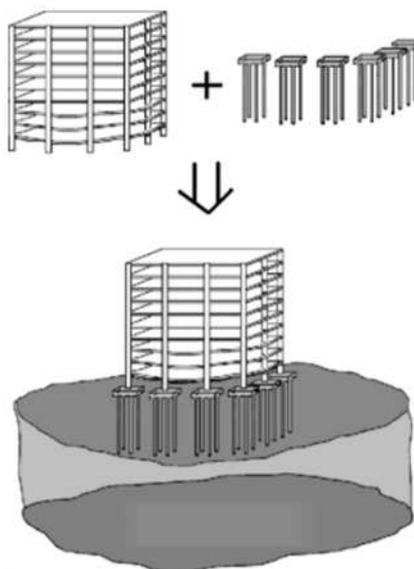
A NBR 6122:2019, no item 5.5 Análise interação fundação-estrutura, cita duas obrigatoriedades para esta análise:

“Em estruturas nas quais a deformabilidade das fundações pode influenciar na distribuição de esforços, deve-se estudar a interação fundação-estrutura, sendo obrigatório esse estudo nos seguintes casos:

- a) estruturas nas quais a carga variável é significativa em relação à carga total, tais como silos e reservatórios;
- b) estruturas com mais de 55,0 de altura, medida do térreo até a laje de cobertura do último piso habitável;

Interação fundação-estrutura: “processos de análise estrutural que consideram conjuntamente as deformabilidades das fundações e da superestrutura.” (NBR 6122:2019).

A importância desse assunto de interação solo-estrutura é grande e precisa ser difundida. Basta imaginar que uma mesma estrutura terá um comportamento diferente se assentadas em dois tipos de solos completamente diferentes. A figura 11 mostra a junção da superestrutura, infraestrutura e solo em uma só análise.

Figura 11 – Superestrutura + Infraestrutura + Solo

Fonte: TQS

Velloso e Lopes (2010) dizem que a análise da interação solo-estrutura tem como objetivo conhecer os deslocamentos reais da fundação e os seus esforços internos. Estes esforços podem ser conhecidos por meio de uma forma direta ou indireta. A forma direta seria através da análise da interação e a indireta por meio das pressões de contato. As pressões de contato são as pressões na interface do solo com a estrutura. É de extrema importância o conhecimento da pressão de contato porque é ela quem vai definir os esforços internos atuantes na fundação e a partir delas será feito o dimensionamento estrutural.

Segundo Velloso e Lopes (2010), os fatores que afetam as pressões de contato são: características das cargas aplicadas, rigidez relativa fundação-solo, propriedades do solo e intensidade das cargas. Todos os conceitos desses quatro fatores a seguir estão baseados em Velloso e Lopes (2010).

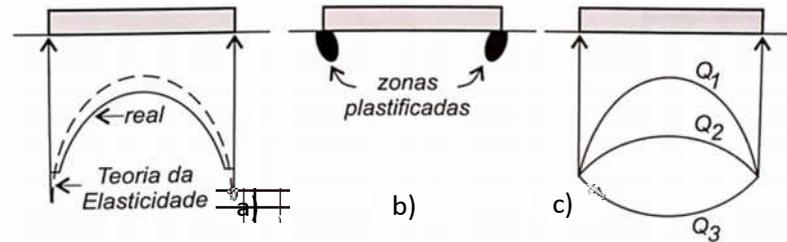
As características das cargas aplicadas apontam que a resultante das pressões de contato na interface solo-estrutura deve ser igual e oposta à resultante das cargas vindas da superestrutura. A rigidez relativa fundação-solo diz que quanto mais flexível for a fundação, mais a pressão de contato refletirá às cargas da superestrutura.

As propriedades do solo afetam às pressões de contato, pois a resistência ao cisalhamento do solo determina as pressões máximas nas bordas das fundações superficiais.

Por último, quanto maior a intensidade das cargas da estrutura sobre uma sapata rígida, as pressões de bordo permanecerão constantes e as da parte central aumentarão. Esse último fator se deve à teoria da elasticidade que afirma que, teoricamente, as pressões de

borda de uma sapata rígida são infinitas (figura 12a). A figura 12b mostra que, mesmo para cargas de serviço, as bordas são consideradas zonas plastificadas. A figura 12c, por sua vez, retrata a ideia de que quanto maior a carga aplicada, maior será a pressão de contato na região central e as pressões de bordo se manterão constantes.

Figura 12 – Intensidade das cargas

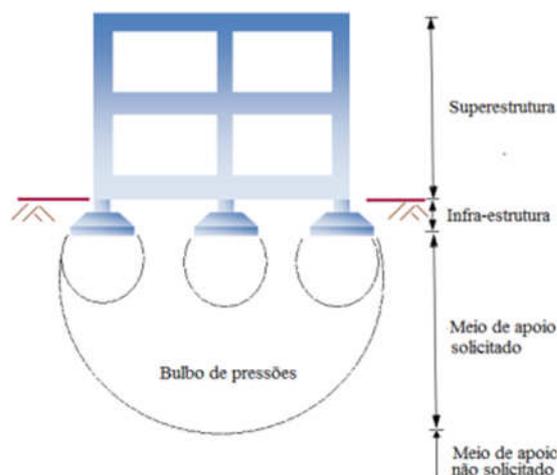


Fonte: Velloso e Lopes (2010, adaptada)

A carga que vem da superestrutura, passa pela infraestrutura e se dissipa no solo, a sua área de maior impacto será nas regiões mais próximas da interface solo-estrutura. Esse impacto virá através de tensões e deformações no solo. À medida que a profundidade aumenta, a tensão e deformação vão sendo absorvidas pelo solo e assim, diminuindo. À uma determinada profundidade, o solo não será mais solicitado e qualquer ponto que esteja nessa região não sofrerá mais influência da estrutura.

Com esse conceito, sabe-se então que abaixo da superestrutura há uma região do solo que receberá influência das tensões e deformações e há outra, mais profunda, que não receberá, com mostrado na figura 13. Bulbo de tensão é o nome da região afetada pelo carregamento externo, o da estrutura.

Figura 13 – Região do bulbo de pressões



Fonte: Cruz (2012)

Partindo para a modelagem para essas regiões, Cruz (2012) cita que dois modelos gerais podem ser idealizados:

- a) Modelo da região limitada
- b) Modelo do espaço semi-infinito

No modelo “a”, a região de estudo precisa ser limitada, ou seja, é preciso definir a profundidade que receberá influência do carregamento externo, além disso o solo pode ser considerado como indeslocável ou rígido. No modelo “b” essa região não precisa ser definida e regiões consideradas afastadas para o modelo “a”, aqui serão levadas em consideração. O modelo b precisa ser modelado por meio de métodos numéricos, mais especificamente, o método de elementos de contorno muito eficaz para modelos do espaço semi-infinito (CRUZ, 2012).

5.8.EFEITOS DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

Segundo Jordão (2003), considerar a ISE no modelo estrutural faz com que haja uma redistribuição de esforços solicitantes nos elementos estruturais, uniformizando os recalques diferenciais. A consideração da interação solo-estrutura também se faz necessária para estabilidade global da estrutura.

Gusmão (1990, apud Jordão 2003) constata que devido à interação solo-estrutura, a redistribuição de cargas faz com que os pilares que tendem a recalcar menos são os que recebem um acréscimo de carga para que os esforços se distribuam de forma mais igualitária.

Os deslocamentos que ocorrem nos apoios, nas fundações, podem provocar uma redistribuição de esforços. Um dos efeitos da ISE provocada por essa redistribuição de esforços é o alívio de cargas nos pilares que apresentam os maiores deslocamentos verticais e o acréscimo de carga nos pilares que apresentam os menores recalques. A deformada de recalques se torna mais suave (GUSMÃO e GUSMÃO FILHO, 1994).

Segundo Velloso e Lopes (2010), se uma estrutura apresenta recalques uniformes, a redistribuição de esforços será mínima. Grandes recalques absolutos irão prejudicar o bom funcionamento da construção, pois a estrutura irá recalcar como um todo. Além disso, grandes valores de recalques diferenciais irão provocar uma redistribuição de esforços, surgindo assim uma nova distribuição de cargas na estrutura. Esse último caso pode afetar sua estabilidade global e comprometer a segurança da construção (SOUZA e REIS, 2008).

5.9. INFLUÊNCIA NA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

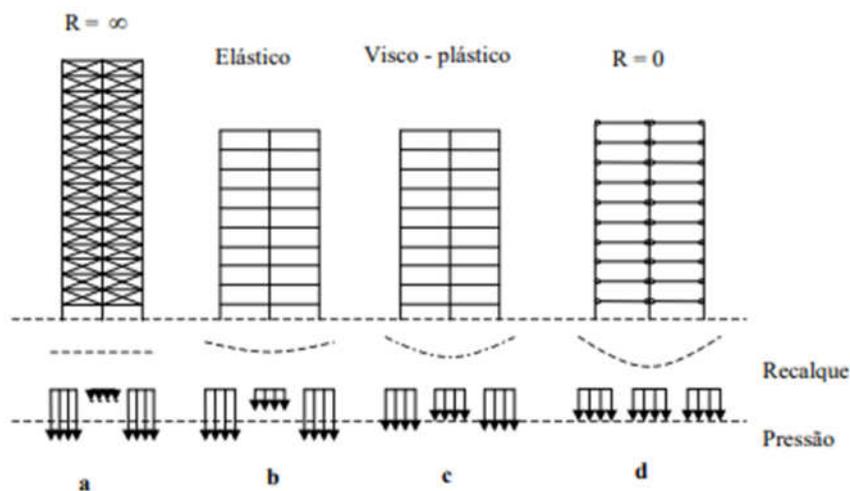
Para Iwamoto (2000), os efeitos solo-estrutura sofrem a influência do tempo, da rigidez da estrutura e do processo construtivo. Além desses efeitos, a rigidez relativa estrutura-solo também será apresentada.

5.9.1. Influência do tempo

Com o passar do tempo, a estrutura recalca mais até se estabilizar. Esse recalque é por adensamento. Como visto, o adensamento é mais preocupante para solos argilosos.

A superestrutura vai se deformando ao longo do tempo, Chamecki (1969) apresenta quatro possíveis casos que podem acontecer representados na figura 14.

Figura 14 – Interação solo-estrutura no tempo



Fonte: Chamecki (1969)

O **caso a** se refere à uma estrutura com rigidez infinita e, assim, recalque considerado uniforme. Para esse caso, o solo tende a se deformar mais no centro do que nos bordos. Devido a essa tendência de se deformar mais nos apoios centrais e menos nos apoios da extremidade da estrutura, a pressão de contato na região central é menor e nas extremidades, é máxima.

À medida que a rigidez vai desaparecendo, chega-se ao **caso d** que é uma estrutura sem rigidez, dita flexível. Por ser flexível ela se adaptará à deformação do solo e assim a distribuição de pressões de contato não se modifica mesmo com um aumento de recalques.

O **caso b** é uma estrutura que a sua rigidez faz com que ela não dependa da velocidade da progressão dos recalques, são estruturas que não possuem recalques diferenciais muito acentuados.

O **caso c** é uma estrutura que a sua rigidez depende da velocidade de progressão de recalques diferenciais. Iwamoto (2000) considera que é uma estrutura visco-elástica. Se o aumento do recalque ocorre rápido, a estrutura se comporta como o **caso b** de uma estrutura de comportamento elástico. Se a progressão é lenta, a estrutura tenderá a ter um comportamento viscoso e se assemelhará ao **caso d**. Esse comportamento viscoso ocorre devido à fluência do concreto que redistribui as tensões em outras peças que estejam menos solicitadas, diminuindo as tensões concentradas.

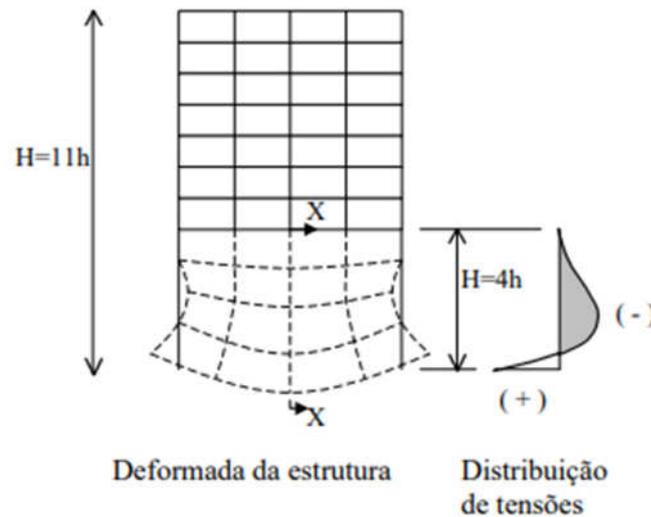
Caso a: edifícios muito altos. **Caso b:** estruturas metálicas. **Caso c:** estruturas de concreto armado. **Caso d:** prédios compridos ao longo do eixo horizontal.

5.9.2. Influência da rigidez da estrutura

Gusmão (1990) cita que o número de pavimentos de uma edificação é um dos fatores que mais influencia na rigidez da estrutura. Quanto maior a quantidade de pavimentos, maior é a rigidez da estrutura.

Ramalho e Corrêa (1991, apud Iwamoto, 2000) fizeram uma análise de dois edifícios apoiados em sapatas, um com uma estrutura composta de laje cogumelo e o outro com um sistema de laje-viga e pilar. Mesmo para um solo relativamente rígido, com $E = 100.000 \text{ kN/m}^2$, a diferença de resultado quando se considerou ou não a flexibilidade da fundação foi muito significativa para alguns elementos estruturais.

Uma das conclusões foi a de que as lajes cogumelos são mais sensíveis a fundações flexíveis porque esse sistema pede dimensões de pilares mais robustas que tendem a apresentar valores elevados de momentos fletores. Também foi observado que com a redistribuição dos esforços os valores se tornarem menos díspares, os pilares que recebiam mais carga tenderam a diminuir e os pilares que recebiam menos carga passaram a receber mais.

Figura 15 – Influência da rigidez da estrutura

Fonte: Goshy (1978 apud Iwamoto, 2000)

5.9.3. Rigidez relativa estrutura-solo

Gusmão Filho (1998, apud Antoniazzi, 2011) afirmou que na realidade, edifícios com mais de 8 pavimentos, considerada de porte médio a alto, a consideração da rigidez solo-estrutura consegue reduzir de 30 a 60% dos recalques e distorções angulares daquelas previstas no modelo convencional sem a ISE

Lopes e Gusmão (1991, apud Holanda Jr., 1998) modelaram um pórtico para representar um edifício de concreto armado apoiado sobre um meio elástico, o foco do estudo foi a interação solo-estrutura com ênfase nos recalques. Esse modelo definiu o parâmetro de rigidez relativa estrutura-solo (K_{SS}).

$$K_{SS} = \frac{E_C \cdot I_b}{E_S \cdot l} \quad (13)$$

Onde E_C é o módulo de elasticidade do material da estrutura, I_b o momento de inércia da viga típica, E_S o módulo de elasticidade do solo e l o comprimento de vão entre os pilares.

A viga proposta por Meyerhof (1953, apud Iwamoto, 2000) é uma viga de rigidez à flexão equivalente que vai estimar a contribuição da superestrutura. Para estrutura em pórtico de concreto armado, ela equivale ao somatório da rigidez das vigas da estrutura e da rigidez dos painéis de alvenaria que fecham a estrutura.

Meyerhof (1953) já havia detalhado essa rigidez, relacionando-a às rigidezes do solo e da superestrutura.

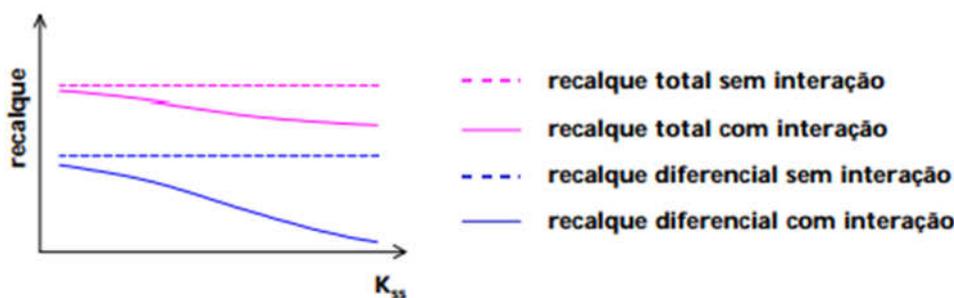
$$K_{SS} = \frac{K_e}{K_S} = \frac{n \cdot \sum \frac{E_C \cdot l}{l^4}}{E_S} \quad (14)$$

Onde K_e é a rigidez da superestrutura, K_S a rigidez do solo e n é o número de pavimentos.

Mota (2009) cita que os autores Meyerhof (1953), Goshy (1978), Barata (1986) e Gusmão (1990) fizeram estudos e mostraram que as edificações e os seus desempenhos são governados pela rigidez estrutura-solo. Eles chegaram à conclusão que quanto maior a rigidez estrutura-solo, menores serão os recalques absolutos e diferenciais, nos quais os diferenciais são os mais afetados os mais influenciados por essa rigidez.

No estudo de Lopes e Gusmão (1991), eles observaram que os recalques com interação diminuíam com o aumento da rigidez relativa estrutura-solo. Nos casos sem interação, os recalques permaneciam constantes, como mostrado na figura 16.

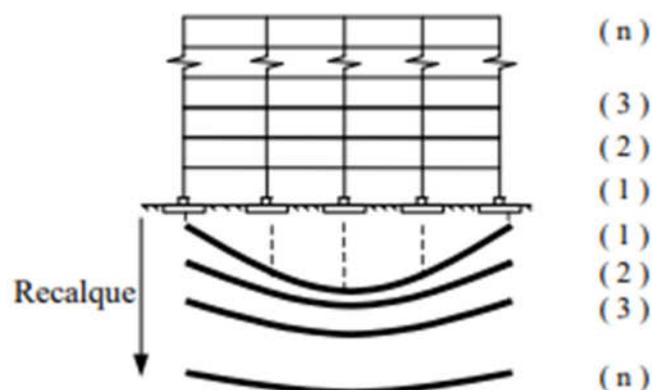
Figura 16 – Recalque x rigidez relativa estrutura solo



Fonte: Lopes e Gusmão (1991, apud Holanda Jr., 1998)

5.9.4. Influência do processo construtivo

Gusmão e Gusmão Filho (1994) indica que à medida que o número de pavimentos de uma edificação aumenta, o recalque tende a ser uniformizado devido ao fato de que a estrutura se torna mais rígida, como mostrado na figura 17. Essa rigidez, entretanto, não cresce linearmente com o número de pavimentos. Os autores citam que a maior parte dos estudos considera que não há carregamento durante a construção, uma hipótese equivocada porque a altura influencia a rigidez da estrutura.

Figura 17 – Interação solo-estrutura com o processo construtivo

Fonte: Gusmão e Gusmão Filho (1994)

Fonte et al. (1994) realizaram um estudo onde compararam os reais recalques na obra de um edifício de 14 andares com o que havia sido previsto com os modelos numéricos. Foram observadas algumas situações:

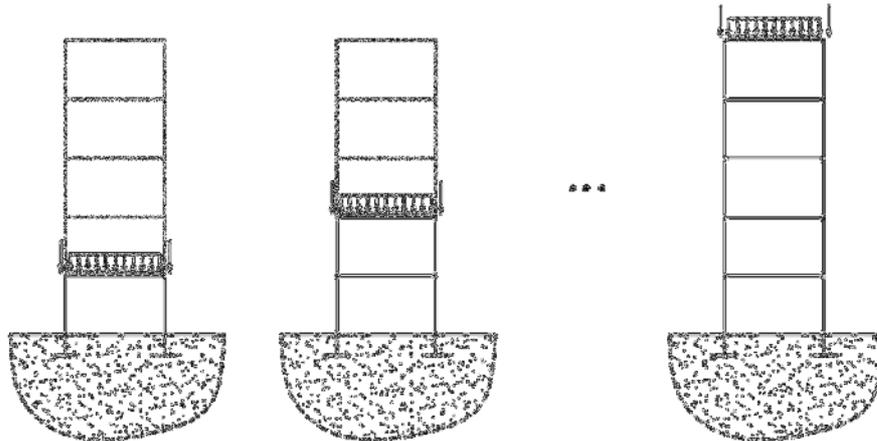
- O modelo que aplica a carga de forma instantânea e não considera a interação solo-estrutura, superestimou os recalques diferenciais por não ter considerado a rigidez da estrutura.
- O modelo que considerou a interação solo-estrutura, mas aplicou o carregamento da estrutura completa de forma instantânea, subestimou a previsão de recalques. Como não foi considerado o carregamento de forma gradual e acréscimo de rigidez, a estrutura foi considerada com maior rigidez do que ela realmente teria.
- O último modelo, e o que mais se aproximou do resultado em campo, foi o que considerou a interação solo-estrutura e o carregamento gradual da estrutura. Isso fez com que a rigidez dos elementos fosse sofrendo as modificações a cada carregamento.

Holanda JR. (1998) utilizou do processo sequencial direto para simular numericamente a seqüência construtiva. Essa seqüência diz que um pavimento não causa esforços solicitantes aos pavimentos superiores que, por sua vez, ainda não foram construídos. Esse modelo consiste em analisar cada pavimento com apenas as suas barras de pórtico e o seu carregamento correspondente, o que representa o levantamento do pavimento com uma análise independente dos esforços solicitantes dos outros. Cada pavimento é então modelado até que se chegue ao topo do edifício. Segundo o autor cada etapa consiste em uma análise individual do sistema solo-estrutura, como mostrado na figura 18.

Todas as análises, de cada pavimento, são consideradas elasto-lineares e para encontrar os esforços finais basta somar os esforços calculados em todas as etapas. Os

recalques finais e os deslocamentos nodais também são obtidos pela soma ou superposição de cada etapa (HOLANDA JR, 1998).

Figura 18 – Modelagem considerando o processo construtivo



Fonte: Holanda Jr. (1998)

Seguindo essa ideia, os deslocamentos verticais não são afetados pelo carregamento dos pavimentos inferiores. Os recalques diferenciais entre os nós de cada pavimento, por sua vez, diminuem nos andares superiores, pois quando mais alto o pavimento for, menor será a superposição de carregamentos e consequentemente de recalques.

5.10. DIFICULDADES PARA A MODELAGEM DA INTERAÇÃO SOLO ESTRUTURA

A modelagem da interação solo estrutura apesar de sempre tentar se aproximar da realidade não consegue representá-la perfeitamente devido às incertezas do solo. Adota-se então algumas simplificações que são transmitidas e aplicadas no modelo. Gusmão Filho (2002) cita algumas dificuldades que ocorrem ao modelar a ISE.

Com relação à superestrutura é muito difícil modelar a sequência construtiva, as propriedades reológicas dos materiais utilizados na estrutura, bem como é difícil também representar o carregamento externo. Quanto à infraestrutura, a transferência das cargas vindas da superestrutura para o solo base é complexo, também pode-se acrescentar a dificuldade em se modelar a execução das fundações. Já o solo, ele é um material heterogêneo, os parâmetros que devem ser adotados nos cálculos não abrangem o comportamento do totalidade do solo e

além disso, o maciço de solo também modifica com o decorrer do terreno, podendo alterar suas tensões (GUSMÃO FILHO, 2002).

5.11. MODELOS DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA

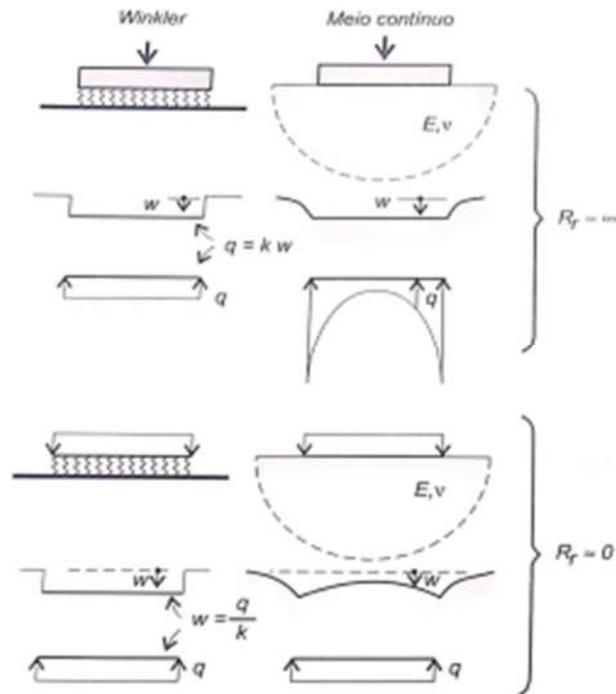
A modelagem considerando a interação solo estrutura pode ser feita basicamente através de um método mais simplificado com a hipótese de Winkler ou através de métodos computacionais que se utilizam de métodos discretos de análise. Velloso e Lopes (2010) apresentam duas maneiras de analisar a interação solo-estrutura, a primeira pela hipótese de Winkler e a segunda por meio contínuo.

Na primeira forma, Winkler propõe soluções para vigas e placas com base da Teoria da Elasticidade usando assim o modelo elástico. É a forma de modelagem mais comum, difundida e que traz bons resultados. É chamada de modelo ou hipótese de Winkler e também é conhecida como modelo de molas. O modelo usa um conjunto de três molas translacionais, cada uma em uma direção (x , y , z) que são caracterizadas e parametrizadas através de ensaios ou correlações.

Na segunda forma o meio contínuo pode ser elástico ou elastoplástico. O modelo elástico irá considerar o módulo de elasticidade e a viscosidade do solo enquanto no elastoplástico irá considerar o módulo de elasticidade, a viscosidade, a coesão e o ângulo de atrito do solo. O modelo contínuo elástico é baseado na teoria da elasticidade e há algumas soluções para vigas e placas enquanto o segundo, o elastoplástico, necessita de uma solução numérica pois são dificilmente justificados (VELLOSO e LOPES, 2010).

As soluções numéricas são através dos métodos discretos de aproximação que podem ser pelo método das diferenças finitas, método dos elementos finitos e método dos elementos de contorno. Este último citado será o de maior enfoque para o presente trabalho. A figura 19 mostra a diferença entre esses dois modelos.

Figura 19 – Modelo de Winkler e no meio contínuo



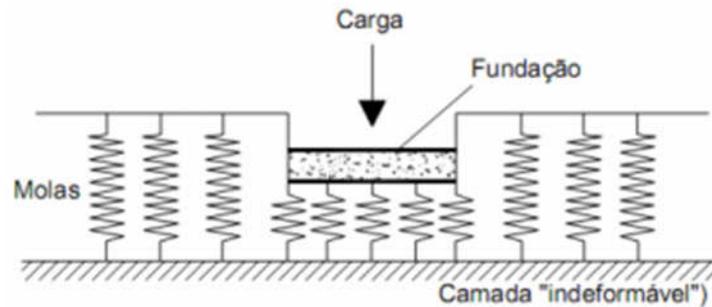
Fonte: Velloso e Lopes (2010)

Normalmente o solo é considerado como um material de comportamento elástico-linear porque é solicitado por tensões que não chegam perto da tensão de ruptura. Assim, a teoria da elasticidade é aplicada e admite-se que o comportamento da curva tensão x deformação é aproximadamente linear para esses níveis de tensão.

5.11.1. Modelo de Winkler

O modelo proposto por Winkler (1867) caracteriza o solo como uma série de molas lineares-elásticas que não se conectam entre si. Por esse motivo, também é conhecido como modelo de molas.

De acordo com o modelo, só ocorre deformação onde o carregamento existe, não há a consideração dos efeitos das molas adjacentes como mostrado na figura 20. O material nesse método segue a lei de Hooke e é considerado elástico-linear. Esta elasticidade pode ser caracterizada por uma força que distribuída por uma área unitária irá causar um deslocamento unitário (BAZZAN, 2015).

Figura 20 – Molas de Winkler

Fonte: Antoniazzi (2011)

O modelo com base na Hipótese de Winkler, proposta em 1867, considera uma viga sobre um meio elástico, no qual o solo é substituído por uma série de molas, independentes e idênticas, igualmente espaçadas e de comportamento elástico-linear (ARAÚJO, 2013).

Considerar que o solo é um meio elástico é uma simplificação, visto que ele só é considerado elástico a pequenos carregamentos. Nesse modelo também é considerado que o solo é homogêneo e isotrópico, outra simplificação. Apesar de ser um método de fácil compreensão, é preciso ter cuidado na análise para que as simplificações não tragam resultados equivocados. Como se trata de um modelo no qual as molas são independentes, a coesão das partículas no meio solo fica comprometida (PORTO, 2010).

Apesar de toda simplificação, é um modelo que pode ser usado tanto para carregamentos verticais, em fundações que recebem esforços de compressão, quanto para carregamentos horizontais, como contenções ou estacas que recebem esforços horizontais. No solo modelado por Winkler, as tensões são proporcionais aos deslocamentos, como mostrado na equação (15).

$$\sigma = k_v \cdot w \quad (15)$$

Onde σ é a tensão média na base da fundação, k_v o coeficiente de mola ou módulo de reação vertical e w é o recalque médio da fundação.

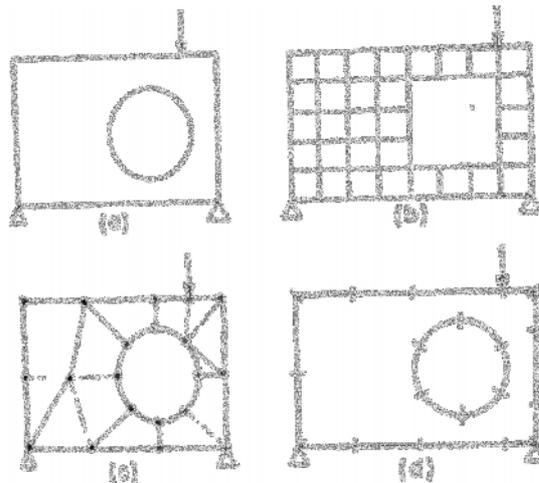
O módulo de reação vertical é a reação do solo ao receber a tensão aplicada pela superestrutura, em outras palavras é a rigidez imposta pelo solo.

5.11.2. Métodos discretos de aproximação

Como já foi dito no decorrer do trabalho, o solo possui um comportamento complexo e não homogêneo. Apesar disso, partindo da ideia que a carga atuante sobre o solo é bem inferior ao estado de plastificação do mesmo, o solo pode ser aproximado a um material de comportamento elástico em alguns casos. Por se tratar de um assunto complexo, com muitas variáveis, parâmetros e equações, a análise da interação solo-estrutura torna-se inviável de ser feita se não tiver a utilização dos programas computacionais (IWAMOTO, 2000).

Os principais métodos numéricos são o método das diferenças finitas (MDF), o método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC), mostrados na figura 21. Esses três métodos levam em consideração a técnica dos resíduos ponderados, eles discretizam o problema e dão soluções aproximadas para os mesmos.

Figura 21 – (a) Problema, (b) Modelagem pelo MDF, (c) Modelagem pelo MEF e (d) Modelagem pelo MEC.



Fonte: Camargo (2002)

O MDF substitui a equação diferencial que governa o problema por uma equação algébrica que irá fazer a relação do valor de um ponto da variável do problema em estudo a valores em quatro pontos vizinhos, que estão localizados em duas linhas ortogonais (CAMARGO, 2002). A solução nesse método se dá nos pontos de interseção da malha ortogonal. Por usar apenas elementos retangulares na malha, o MDF gera um erro de discretização maior que os outros dois métodos numéricos.

O MEF é o método mais conhecido atualmente e é muito utilizado na análise na superestrutura. Ao contrário do MDF, o traçado de sua malha pode ter várias formas

geométricas, não precisando ser ortogonal. Uma de suas grandes vantagens é a excelente discretização que pode ser feita no domínio de estudo. Para análises unidimensionais e bidimensionais, o MEF é muito eficiente, porém quando se trata de simular o solo em um meio tridimensional e infinito ou semi-infinito, a quantidade de dados necessários torna o tempo de processamento extenso além de se tornar custoso.

O MEC é um método discreto muito utilizado para o domínio infinito ou semi-infinito, pois ele possibilita considerar todo o domínio sem precisar limitá-lo. Entre os métodos numéricos, o MEC é o mais recente e a sua formulação tem a mesma origem do MDF e do MEF.

Todos os três métodos numéricos procuram minimizar os erros. A ideia geral para se analisar um problema a partir desses métodos discretos, é subdividir o problema em partes e representá-las da forma mais fiel possível. Para se aproximar da solução exata, intervalos menores do domínio são analisados a fim de encontrar uma função que satisfaça a cada parcela. Quanto menor o intervalo do domínio analisado, maior será o grau de precisão da solução e mais as funções se aproximarão da solução exata.

Apesar do cuidado em achar funções que representem bem o intervalo analisado, o resultado não será exato, pois é uma solução aproximada. Assim, quando a função é substituída na equação diferencial restará um resíduo e por isso esse método de análise é chamado de método dos resíduos ponderados.

O método dos elementos de contorno (MEC) surgiu no final da década de 60 e vem ganhando cada vez mais atenção de pesquisadores sendo cada vez mais estudado nas simulações de engenharia. Em comparação com os outros métodos numéricos, anteriormente citados, o MEC possui vantagem quando se trabalha com elementos infinitos ou semi-infinitos. Ele simplifica a discretização do modelo tornando-o mais simples.

O meio contínuo infinito ou semi-infinito, o solo, é representado normalmente a partir de representações integrais dos elementos de contorno. Já a estrutura, superestrutura e a infraestrutura, é representada pelos elementos finitos. A rigidez do conjunto superestrutura com infraestrutura é então considerada para a análise da obra. Segundo Crespo (2004), a combinação dos dois métodos, elementos de contorno e elementos finitos, é feita através da condição de compatibilidade de deslocamentos, sem o deslizamento no contato, ou interface solo-estrutura, da estrutura de fundação com o solo que é o meio contínuo.

No MEC, primeiramente, são obtidas as relações governantes do domínio do problema que são apresentadas matematicamente em forma de equações diferenciais ordinárias (EDOs)

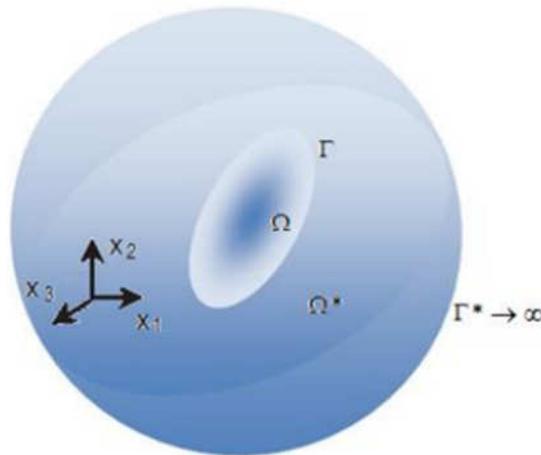
ou parciais (EDPs). Em seguida, essas equações são transformadas em equações integrais (EIs) e definidas no contorno (CRUZ, 2012). Segundo Brebbia et al. (1983, apud CRUZ, 2012), as equações integrais são obtidas seguindo a técnica dos resíduos ponderados nas equações diferenciais. Como muitas vezes essas equações não apresentam soluções analíticas, discretiza-se o problema e assim se obtém soluções aproximadas por análise numérica das partes discretizadas.

“O método dos Elementos de Contorno (MEC) consiste, basicamente, em obter a solução das equações diferenciais que descrevem o comportamento de um corpo no seu domínio, através da solução de equações integrais sobre o contorno.” (VIEIRA, 2009).

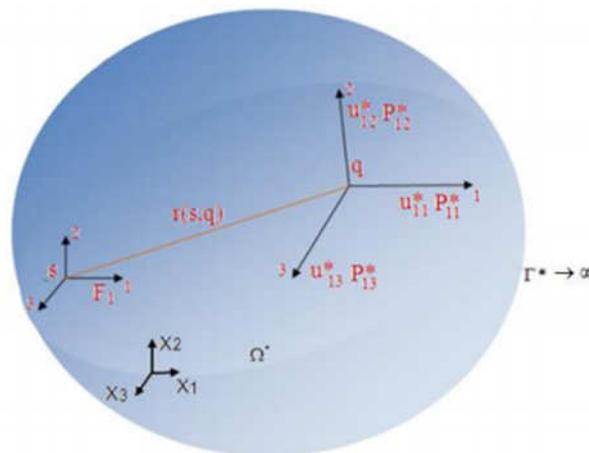
Para a equação integral ser formulada, é necessária uma solução fundamental (BRAGA, 2012). Segundo Cruz (2012), a solução fundamental surge de um problema conhecido. O problema fundamental possui características como o espaço que seu domínio (Ω^*) e contorno (Γ^*) estão inseridos e, a depender delas, diferentes soluções fundamentais são obtidas. O autor ainda cita que como as soluções numéricas são dadas pela discretização de equações integrais definidas no contorno, as dimensões do problema são reduzidas.

O problema fundamental é o problema padrão da área que se deseja analisar e que se faz necessário ter o conhecimento da sua solução (BREBBIA, 1978 apud CRUZ, 2012). Esse problema possui domínio infinito ou semi-infinito denotado por Ω^* e contorno Γ^* . O problema real é o sólido que se deseja analisar, ele está contido no problema fundamental e é denotado pelo domínio Ω e contorno Γ (CRUZ, 2012), mostrado na figura 22.

A solução fundamental vai representar como que uma carga unitária aplicada no domínio influenciará outro ponto desse mesmo domínio, considerando o domínio como sendo infinito ou semi-infinito. O ponto de aplicação da carga unitária é chamado de ponto fonte, “s”, e o ponto que recebe a influência é o ponto campo, “q”, como mostrado na figura 23. Essa solução fornece uma maior precisão ao método, pois como ela é muito aproximada do problema real, será utilizada como uma função ponderadora quando for aproximar a equação governante do domínio.

Figura 22 – Problema real e fundamental

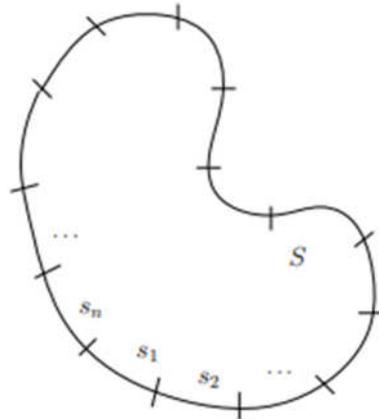
Fonte: Adaptada de Barbirato (1999, apud Cruz, 2012)

Figura 23 – Solução fundamental com os pontos fonte e de campo

Fonte: Adaptada de BARBIRATO (1999, apud Cruz, 2012)

Para resolver numericamente as EIs, é preciso discretizar o contorno, ou seja, dividi-lo em vários elementos, como mostrado na figura 24. Cada elemento será representado por deslocamentos e forças de superfície que são em função de seus valores nodais. Cada nó terá um sistema de equações algébricas lineares que será resolvido depois que as condições de contorno forem aplicadas (VIEIRA, 2009).

Já os deslocamentos dos pontos internos serão calculados a partir da Identidade Somigliana em função das forças e dos deslocamentos no contorno (VIEIRA, 2009). Para pontos do contorno, um artifício de transformar um ponto do contorno em um do domínio foi criado. O artifício considera que há uma semicircunferência com raio tendendo a zero centrada no ponto do contorno.

Figura 24 – Discretização do contorno

Fonte: Braga (2012)

5.12. COEFICIENTE DE MOLA

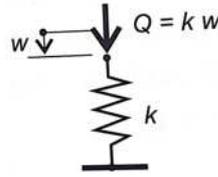
5.12.1. Coeficiente de mola vertical

A definição de coeficiente de mola é análoga ao módulo de reação vertical do solo. Coeficiente de mola se refere à rigidez que o solo tem para resistir ao deslocamento provocado por uma carga, enquanto que o módulo de reação vertical se refere à uma tensão aplicada e não mais à uma carga.

No modelo de molas de Winkler, a pressão e o deslocamento estão relacionados por um coeficiente de recalque. As pressões de contato não só estão relacionadas ao deslocamento, mas são também proporcionais ao recalque.

$$q = k_v \cdot w \quad (16)$$

Onde q é a carga ou pressão aplicada, k_v é o coeficiente de mola ou módulo de reação vertical, e w é o recalque, como mostrado na figura 25.

Figura 25 – Mola de Winkler

Fonte: Velloso e Lopes (2010, adaptada)

Alguns programas computacionais, como TQS e Eberick, foram desenvolvidos a partir do modelo de Winkler na interação solo-estrutura. Com isso, se faz muito necessário encontrar os coeficientes de mola.

Esse coeficiente pode ser encontrado através de ensaio de placa, correlações empíricas com as sondagens de ensaio SPT, tabelas com valores típicos, correlações com recalque real da fundação.

Ensaio de placa/ Prova de carga sobre placa

Método eficiente que obtém o valor do coeficiente de reação vertical através do ensaio *in loco*, a prova de carga sobre placas. Consiste em dar ciclos de carga e descarga no terreno, preferencialmente na cota de assentamento da sapata. Da equação (16),

$$k_v = \frac{q}{w}$$

O conjunto de ciclos aplicados permitem traçar o gráfico com a curva tensão x deformação que representará o comportamento do solo quanto à sua deformação.

O coeficiente de reação vertical medido no ensaio sobre placa está em função da dimensão da placa e da dimensão e formato da fundação. Sabendo disso, é necessário que haja uma correção do coeficiente considerando esses fatores através das equações (17) e (18). Reis e Souza (2008) mostram as fórmulas a seguir.

$$(k_s^v)_{fundação} = (k_s^v)_{placa} \cdot \left(\frac{B_{fundação} + B_{placa}}{2B_{fundação}} \right)^2, \text{ para solos arenosos} \quad (17)$$

$$(k_s^v)_{fundação} = (k_s^v)_{placa} \cdot \frac{A_{placa}}{A_{fundação}}, \text{ para solos argilosos rijos a muito rijos} \quad (18)$$

Correlações empírica com as sondagens SPT

A correlação com os resultados obtidos nos ensaios de sondagem SPT é muito utilizada. Primeiramente, obtém-se a tensão média admissível a partir do NSPT médio e depois, por correlação na tabela 1, encontra-se o valor de K_v .

Segundo Alonso (1943) e Teixeira e Godoy (1996), pode-se calcular a tensão admissível de uma fundação superficial utilizando a fórmula abaixo. Teixeira e Godoy (1996) dizem que essa fórmula é aplicável para $5 < NSPT < 20$, já Alonso (1943) aumenta esse intervalo de valores para $NSPT \leq 20$.

$$\sigma = \frac{NSPT}{5} \quad (19)$$

Onde σ é a tensão média admissível em kgf/cm^2 e NSPT o número de golpe retirados do ensaio SPT.

Vale ressaltar que discussões geotécnicas acerca da equação (19) não serão discutidas nesse trabalho. Como simplificação, essa foi a fórmula adotada nos cálculos.

Tabela 1 – Correlação empírica com o ensaio SPT

Tensão admissível (kg/cm ²)	Kv (kg/cm ²)	Tensão admissível (kg/cm ²)	Kv (kg/cm ²)
0,25	0,65	2,15	4,30
0,30	0,78	2,20	4,40
0,35	0,91	2,25	4,50
0,40	1,04	2,30	4,60
0,45	1,17	2,35	4,70
0,50	1,30	2,40	4,80
0,55	1,39	2,45	4,90
0,60	1,48	2,50	5,00
0,65	1,57	2,55	5,10
0,70	1,66	2,60	5,20
0,75	1,75	2,65	5,30
0,80	1,84	2,70	5,40
0,85	1,93	2,75	5,50
0,90	2,02	2,80	5,60
0,95	2,11	2,85	5,70
1,00	2,20	2,90	5,80
1,05	2,29	2,95	5,90
1,10	2,38	3,00	6,00
1,15	2,47	3,05	6,10
1,20	2,56	3,10	6,20
1,25	2,65	3,15	6,30
1,30	2,74	3,20	6,40
1,35	2,83	3,25	6,50
1,40	2,92	3,30	6,60
1,45	3,01	3,35	6,70
1,50	3,10	3,40	6,80
1,55	3,19	3,45	6,90
1,60	3,28	3,50	7,00
1,65	3,37	3,55	7,10
1,70	3,46	3,60	7,20
1,75	3,55	3,65	7,30
1,80	3,64	3,70	7,40
1,85	3,73	3,75	7,50
1,90	3,82	3,80	7,60
1,95	3,91	3,85	7,70
2,00	4,00	3,90	7,80
2,05	4,09	3,95	7,90
2,10	4,18	4,00	8,00
2,15	4,27	4,05	8,10
2,20	4,36	4,10	8,20
2,25	4,45	4,15	8,30
2,30	4,54	4,20	8,40
2,35	4,63	4,25	8,50
2,40	4,72	4,30	8,60
2,45	4,81	4,35	8,70
2,50	4,90	4,40	8,80
2,55	4,99	4,45	8,90
2,60	5,08	4,50	9,00
2,65	5,17	4,55	9,10
2,70	5,26	4,60	9,20
2,75	5,35	4,65	9,30
2,80	5,44	4,70	9,40
2,85	5,53	4,75	9,50
2,90	5,62	4,80	9,60
2,95	5,71	4,85	9,70
3,00	5,80	4,90	9,80
3,05	5,89	4,95	9,90
3,10	5,98	5,00	10,00

Fonte: Morisson (1993, apud AltoQi)

Tabelas com valores típicos

A correlação com tabelas deve ser utilizada quando não existirem dados precisos ou quando não forem realizados ensaios do solo *in loco*. Essas tabelas apesar de não ser a forma mais adequada de definir o coeficiente de mola vertical, é uma forma de conhecer a ordem de grandeza de valores a serem utilizados.

A tabela 2 correlaciona valores de CBR com coeficiente de mola.

Tabela 2 – Correlação com o CBR, módulo de reação em kgf/cm³

SOLO		CBR		K (Kgf/cm ³)	
		Min.	Máx.	Min.	Máx.
FINO	OH	2,0	5,0	0,77	3,32
	CH	2,0	5,0	0,77	4,82
	MH	2,5	8,0	1,36	4,82
	OL	2,0	8,0	0,77	7,13
	ML	3,0	15,0	1,85	7,13
	CL	3,0	15,0	1,85	8,33
GROSSO	SC	10,0	20,0	5,59	8,33
	SU	10,0	20,0	5,59	8,33
	SP	15,0	25,0	7,13	9,33
	SM	20,0	40,0	8,33	11,66
	SW	20,0	40,0	8,33	11,66
	GC	20,0	40,0	8,33	11,66
	GU	25,0	50,0	9,33	12,89
	GP	35,0	60,0	10,97	13,94
	GM	40,0	80,0	11,66	15,73
	GW	60,0	80,0	13,94	15,73

Fonte: ACI, 1988
 Legenda:
 G – pedregulho
 S – areia
 M – sedimento
 C – argila
 W – bem graduado
 P – pobremente graduado
 U – Uniformemente graduado
 L – baixa a média compressibilidade
 H – alta compressibilidade
 O – orgânico

Fonte: ACI (1997, apud Milani, 2012)

A tabela 3 correlaciona tipo de solo, que podem ser encontrados por meio de ensaios SPT, a trado e rotativa, com o coeficiente de mola.

Tabela 3 – Valores de k_s^V em KN/m^3

Tipo de Solo	k_s^V (kN/m^3)
Turfa leve - solo pantanoso	5.000 a 10.000
Turfa pesada – solo pantanoso	10.000 a 15.000
Areia fina de praia	10.000 a 15.000
Aterro de silte, de areia e cascalho	10.000 a 20.000
Argila molhada	20.000 a 30.000
Argila úmida	40.000 a 50.000
Argila seca	60.000 a 80.000
Argila seca endurecida	100.000
Silte compactado com areia e pedra	80.000 a 100.000
Silte compactado com areia e muita pedra	100.000 a 120.000
Cascalho miúdo com areia fina	80.000 a 120.000
Cascalho médio com areia fina	100.000 a 120.000
Cascalho grosso com areia grossa	120.000 a 150.000
Cascalho grosso com pouca areia	150.000 a 200.000
Cascalho grosso com pouca areia compactada	200.000 a 250.000

Fonte: Moraes (1976, apud Souza e Reis, 2008)

Terzaghi (1955) sugere os valores da tabela 4 para diferentes tipos de solo. Os valores foram observados através de ensaios de placa quadrada com 30 cm de lado, ou seja, os valores necessitam de correção de acordo com a dimensão e forma da sapata. A resistência q_u corresponde à compressão não drenada.

Tabela 4 – Valores de k_s^V em kN/m^3

Argilas	Rija	Muito Rija	Dura
q_u (MPa)	0,1 a 0,2	0,2 a 0,4	> 0,4
Faixa de valores	16.000 a 32.000	32.000 a 64.000	> 64.000
Valor proposto	24.000	48.000	96.000
Areias	Fofas	Mediamente Compacta	Compacta
Faixa de valores	6.000 a 19.000	19.000 a 96.000	96.000 a 320.000
Areia acima NA	13.000	42.000	160.000
Areia submersa	8.000	26.000	96.000

Fonte: Terzaghi (1955, apud Souza e Reis, 2008)

Correlações com as propriedades elásticas do solo

A correlação com as propriedades elásticas do solo é uma forma mais direta de se determinar o coeficiente de mola vertical. Leva-se em conta a forma, menor dimensão e rigidez do elemento de fundação bem como o módulo de elasticidade do solo e coeficiente de Poisson. Perloff (1975, apud Souza e Reis, 2008) propõe a equação (20) que representa essa correlação.

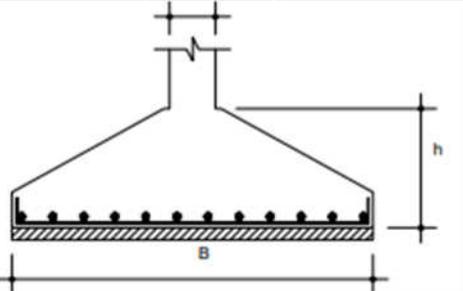
$$k_s^v = \frac{E_s}{1 - \nu^2} \cdot \frac{1}{I_w} \cdot \frac{1}{B} \quad (20)$$

Onde E_s é o módulo de elasticidade do solo, ν é coeficiente de Poisson, I_w é o fator de influência que depende da rigidez e da forma do elemento de fundação e B é a menor dimensão da base do elemento de fundação. O fator de influência é mostrado na tabela 5.

Para simulação de cálculo nesse trabalho, o coeficiente de Poisson foi considerado 0,30. Souza e Reis (2008) observaram que, de forma geral, para siltes o coeficiente varia entre 0,30 e 0,35, para argilas varia entre 0,10 e 0,50 e para areias varia entre 0,15 e 0,40.

Tabela 5 – Fator de influência I_w para sapatas

Forma	Fundação Flexível			Rígida
	Centro	Vértice	Valor Médio	
Circular	1,00	0,64	0,85	0,88
Quadrada	1,12	0,56	0,95	0,82
Retangular	Valores de I_w			
L/B = 1,5	1,36	0,68	1,15	1,06
L/B = 2	1,53	0,77	1,30	1,20
L/B = 5	2,10	1,05	1,83	1,70
L/B = 10	2,54	1,27	2,25	2,10
L/B = 100	4,01	2,00	3,69	3,40



$$h \geq \frac{B-b}{4} \rightarrow \text{Sapata Rígida}$$

$$h \leq \frac{B-b}{4} \rightarrow \text{Sapata Flexível}$$

Fonte: Souza e Reis, 2008

Souza e Reis (2008) citam que pelo módulo de elasticidade do solo pode variar muito, é recomendado que esta propriedade seja determinada através de ensaios de penetração dinâmica (SPT), de penetração estática (CPT) ou por ensaios triaxiais.

Teixeira e Godoy (1996, apud Souza e Reis, 2008) propõem a utilização do ensaio CPT para a determinação do módulo de elasticidade por meio das equações (21), (22) e (23).

$$E_s = 3q_c, \text{ para solos arenosos} \quad (21)$$

$$E_s = 5q_c, \text{ para solos siltosos} \quad (22)$$

$$E_s = 7q_c, \text{ para solos argilosos} \quad (23)$$

Onde q_c é a resistência de ponta obtida através do ensaio CPT.

Quando não é possível realizar o ensaio de penetração estática, há uma alternativa, o ensaio SPT. Com o número de golpes necessários para a penetração de 30cm a cada metro (N_{SPT}) do ensaio e com a caracterização tati-visual do solo, procedimento também realizado no ensaio SPT, encontra-se q_c através da equação (24). Tendo esse valor de resistência de ponta, acha-se o módulo de elasticidade pelas equações (21), (22) e (23).

$$q_c = K_{SPT} \cdot N_{SPT} \quad (24)$$

O K_{SPT} também pode ser encontrado através da tabela 6 proposta por Teixeira e Godoy (1996).

Tabela 6 – Correlação com o tipo de solo

Tipo de Solo	K_{SPT} (MPa)
Areia com pedregulhos	1,10
Areia	0,90
Areia siltosa	0,70
Areia argilosa	0,55
Silte arenoso	0,45
Silte	0,35
Argila arenosa	0,30
Silte argiloso	0,25
Argila siltosa	0,20

Fonte: Teixeira e Godoy (1996, apud Souza e Reis, 2008)

Também é possível utilizar do coeficiente edométrico E_0 do solo para encontrar o coeficiente de mola vertical. A equação (25) foi proposta por Rausch (1959, apud MENDES, 2016).

$$k_v = \frac{E_0}{f\sqrt{F}} \quad (25)$$

Onde E_0 é o coeficiente edométrico dado em kgf/cm², F é a área de fundação em cm², f é um coeficiente adimensional considerado como 0,4.

A partir de recalques calculados para a fundação real

É uma forma direta de determinação do módulo de reação vertical. Consiste em calcular as reações de apoio levando em consideração que o apoio é rígido. Com as reações calculadas, determina-se os recalques de todos os pilares.

Com base na Teoria da Elasticidade, Perloff (1975, apud Souza e Reis, 2008) mostra a equação (26) que calcula os recalques imediatos (w_i) em meios contínuos, elástico, homogêneo, isotrópico e semi-infinito.

$$w_i = \sigma \cdot B \left(\frac{1 - \nu^2}{E_s} \right) \cdot I_w \quad (26)$$

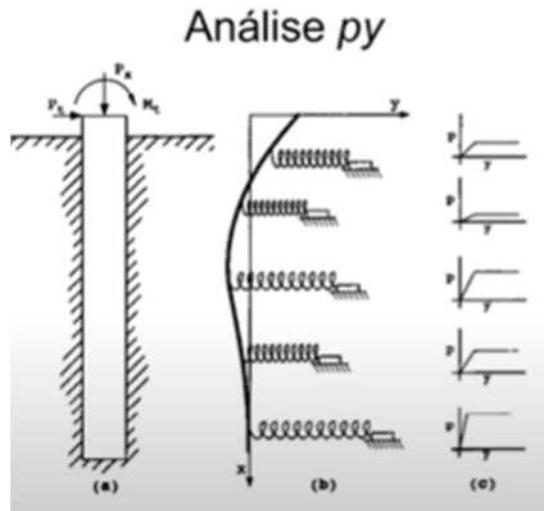
Utilizando a equação (15), obtém-se a primeira aproximação do módulo de reação vertical simulando um maciço de solo elástico. Lança a estrutura então sobre apoios elásticos representados pelos coeficientes de mola ou módulos de reação vertical. Repete-se esse processo iterativo até que haja uma convergência de recalques ou reações de apoio.

5.12.2. Coeficiente de mola horizontal

Em estacas e em estruturas de contenção é comum que os elementos estruturais sejam carregados horizontalmente. As hipóteses de Winkler podem também ser aplicadas nesses casos.

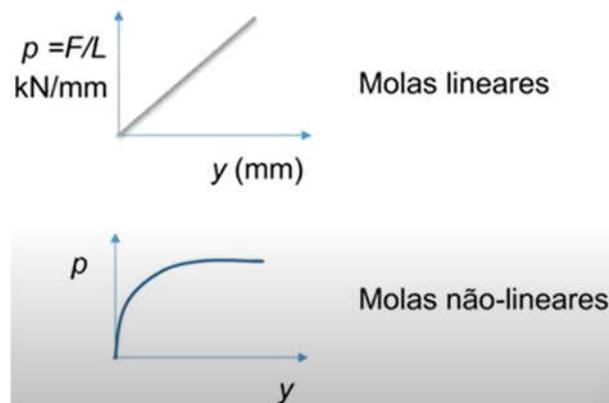
Quando o elemento estrutural recebe esforços horizontais, um lado da estaca estará sendo comprimido e o outro tracionado, porém os solos não resistem à tração e então não acompanharão a estaca. Assim, os métodos de meio elástico contínuo não representarão de forma adequada a situação e o comportamento do solo em torno da estaca. Quando o solo não tiver um comportamento linear, as molas lineares de Winkler não poderão ser aplicadas para a modelagem, para esses casos não lineares, o comportamento do solo é modelado até a ruptura pelas curvas p_y , como mostrado nas figuras 26 e 27. Fundações de offshore, por exemplo, possuem um comportamento não linear e podem ser modeladas por essas curvas p_y .

Figura 26 – Análise p_y



Fonte: Ortigão

Figura 27 – Comportamento de molas lineares e não lineares

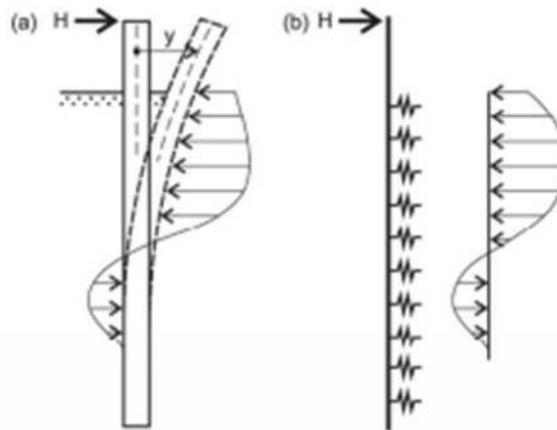


Fonte: Ortigão

Figueiredo et al. (2017) citam que para o coeficiente de mola horizontal, a reação do solo para o esforço lateral atuante não é tão simples mesmo levando em consideração a Hipótese de Winkler. Segundo Velloso e Lopes (2010), a natureza do solo, o carregamento, a forma e dimensão da estaca vão influenciar na reação do solo. O coeficiente de reação horizontal pode ser constante ou pode variar com o avanço da profundidade.

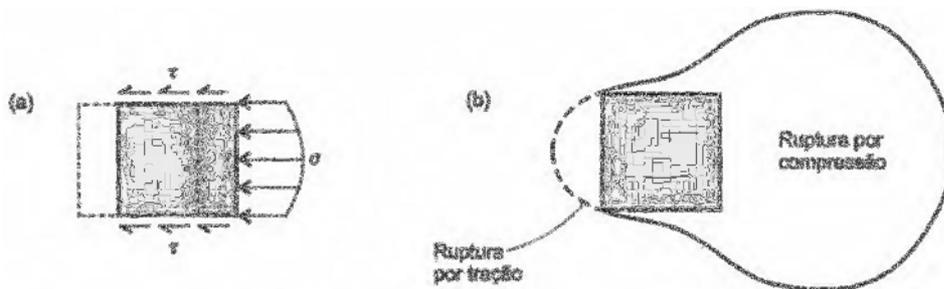
Na figura 28, um esforço lateral é aplicado no topo da estaca gerando um deslocamento diferencial entre o topo e a base do elemento. Figueiredo et al. (2017) cita que o solo irá reagir ao deslocamento horizontal por tensões contra frente da estaca e cisalhantes na lateral e que quase não ocorrerá resistência na parte de trás da estaca, figura 29.

Figura 28 – (a) Estaca submetida a um esforço horizontal, (b) modelagem pelo método de Winkler



Fonte: Velloso e Lopes (2010)

Figura 29 – Reação do solo impedindo o deslocamento horizontal da estaca



Fonte: Velloso e Lopes (2010)

Seguindo a hipótese de Winkler, o módulo de reação horizontal é definido pela equação (27).

$$\sigma = k_h \cdot y \quad (27)$$

Onde σ é a tensão horizontal aplicada, k_h é o módulo de reação vertical, e y é o deslocamento horizontal.

Vale ressaltar que a diferença de módulo de reação horizontal para coeficiente de reação horizontal é devido ao fato de que o primeiro é relacionado a uma tensão e o segundo, a uma carga horizontal. No presente trabalho os dois serão representados por k_h sendo sempre indicado se é um coeficiente ou um módulo.

Coefficiente de Poisson

Uma relação usual é a correlação do coeficiente de mola horizontal com o vertical e com a viscosidade do solo. Para determinar o valor referente a mola horizontal utiliza-se a fórmula abaixo.

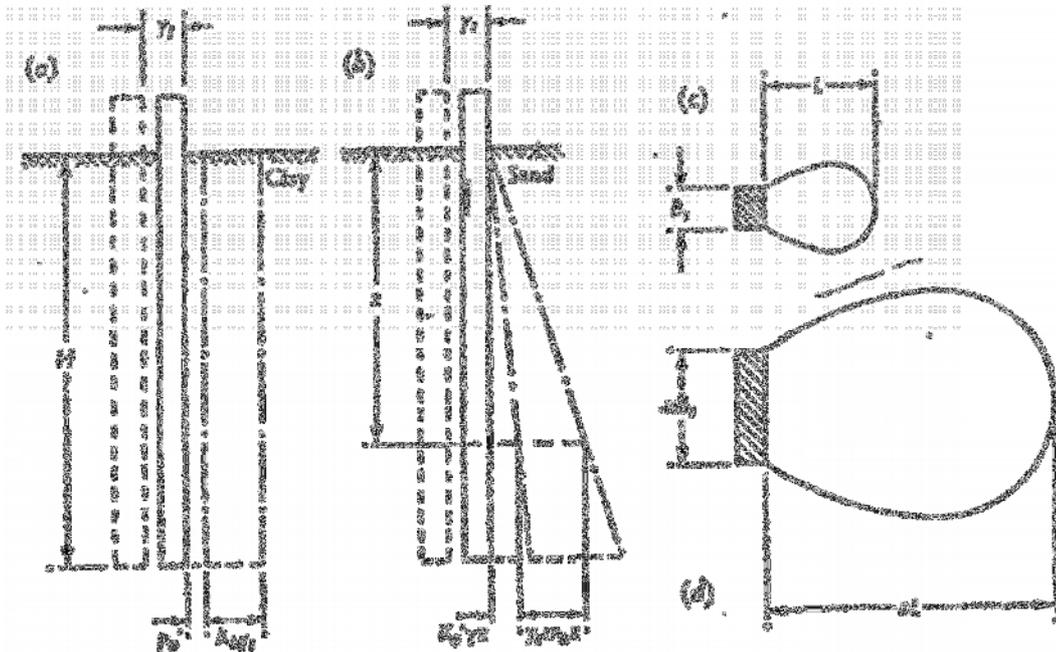
$$k_h = \nu \cdot k_v \quad (28)$$

Onde ν é o coeficiente de Poisson.

Terzaghi (1955)

Terzaghi (1955) diz que o valor de k_h e a sua mudança com a profundidade depende das características do maciço de solo. A figura 30 mostra uma estaca em argila dura e outra em areia e como suas larguras e diâmetros influenciam no bulbo de pressão.

Figura 30 – (a) estaca em uma argila dura, (b) estaca na areia, (c) e (d) influência da largura/diâmetro da estaca na dimensão do bulbo de pressão



Fonte: Terzaghi (1955)

As características de deformação de uma argila rija são maiores ou menores independentes da profundidade que a estaca está inserida. Sendo assim, a reação do maciço de solo é uniformemente distribuída e o coeficiente de reação vertical é dado pela equação abaixo (TERZAGHI, 1955). Caso da figura 30a.

$$k_h = \frac{p}{y_1} \quad (29)$$

Terzaghi (1955) diz que pela falta da coesão da areia, os valores de deslocamento horizontal e o do módulo de reação horizontal são praticamente independentes no tempo. Porém, o módulo de elasticidade da areia aumenta aproximadamente na mesma proporção com a profundidade. Assim, Terzaghi (1955) afirma que pode ser considerado que a pressão necessária para se produzir um deslocamento horizontal aumenta de forma diretamente proporcional com a profundidade.

$$k_h = \frac{p}{y_1} = m_h \cdot z, \text{ para areias e argilas}^* \quad (30)$$

Onde m_h é a taxa de crescimento do coeficiente de reação horizontal com a profundidade (z).

*argilas moles ou normalmente adensadas

Na figura 30c é mostrado o bulbo de tensão para uma estaca de largura B_1 e na figura 30d, para uma estaca de largura nB_1 . O tamanho do bulbo será L e nL , respectivamente.

Terzaghi (1955) afirma que o módulo de elasticidade, tanto para areias quanto para argilas, é constante na direção horizontal e que o deslocamento horizontal (y) aumenta na mesma proporção que se aumenta a largura da estaca (B_1). Sendo assim, $y_n = ny_1$, e:

$$k_{hn} = \frac{p}{y_n} = \frac{p}{ny_1} = \frac{p}{y_1} \cdot \frac{B_1}{nB_1} \quad (31)$$

Considerando $k_{hn} = k_h$, $B_1 = 1ft$ (correspondendo a, aproximadamente, 30cm), $nB_1 = B$ e $\frac{p}{y_1} = k_{h1}$, temos:

$$k_h = \frac{k_{h1}}{B}, \text{ para argilas muito sobreadensadas} \quad (32)$$

Onde k_{h1} é o coeficiente de reação horizontal para uma estaca de 1ft de largura no meio argiloso muito sobreadensado.

Se a estaca estiver em meio arenoso, da equação (30):

$$k_{h1} = \frac{p}{y_1} = m_{h1} \cdot z \quad (33)$$

Como,

$$k_{hn} = \frac{1}{n} k_{h1} \quad (34)$$

Obtém-se,

$$k_{hn} = \frac{1}{n} m_{h1} \cdot z = m_{h1} \cdot z \cdot \frac{B_1}{nB_1} \quad (35)$$

Substituindo $k_{hn} = k_h$, $B_1 = 1ft$ (correspondendo a aproximadamente 30 cm), $nB_1 = B$ e $m_{h1} \cdot B_1 = n_h$, temos:

$$k_h = n_h \frac{z}{B}, \text{ para areias e argilas*} \quad (36)$$

Onde n_h é a constante de reação horizontal das estacas em meio arenoso.

*argilas moles ou normalmente adensadas.

Deve-se sempre analisar se o coeficiente de reação no maciço de solo arenoso cresce linearmente com a profundidade. Isso pode ser verificado através dos perfis de solo dados pelos ensaios SPT e CPT.

A literatura sugere valores para n_h e m_h para solos arenosos e solos argilosos moles, ver tabela 7 e 8.

Tabela 7 – Valores de n_h e m_h para argilas e solos orgânicas moles

Tipo de solo	Faixa de valores de n_h (kN/m^3)*	Valores sugeridos para m_h (kN/m^4)**
Solos orgânicos recentes (vasa, lodo, turfa etc.)	1 a 10	15
Argila orgânica, sedimentos recentes	10 a 60	80
Argila siltosa mole, sedimentos consolidados (norm. adensados)	30 a 80	150

Fonte: Adaptado de Davisson (1970)* e Miche (1930)** (apud Velloso e Lopes, 2010)

*Suposto válido para estacas de 30cm de lado.

Tabela 8 – Valores de n_h e m_h para areias, válidos para estacas de 30cm de lado**

Compacidade	n_h (MN/m^3)	
	Acima do NA	Abaixo do NA
Fofa	2,3	1,5
Medianamente compacta	7,1	4,4
Compacta	17,8	11,1

Fonte: Terzaghi (1955, adaptada apud Velloso e Lopes, 2010)

**Se a largura, dimensão transversal B, da estaca for diferente de 30cm, é necessário multiplicar os valores da tabela por b/B , sendo $b=30cm$.

Para solos argilosos muito sobreadensados, o coeficiente de reação horizontal que é considerado constante, Terzaghi (1955) sugere que sejam os mesmos valores k_v de uma placa quadrada de 1ft (30cm) de lado, são placas horizontais 30 x 30 cm e os coeficientes são chamados de k_{s1} , ver tabela 9.

Tabela 9 – Valores** de k_{s1} em kN/cm³ segundo Terzaghi, 1955.

Argilas	Rija	Muito Rija	Dura
q_u (MPa)	0,1 a 0,2	0,2 a 0,4	> 0,4
Faixa de valores	16.000 a 32.000	32.000 a 64.000	> 64.000
Valor proposto	24.000	48.000	96.000
Areias	Fofas	Mediamente Compacta	Compacta
Faixa de valores	6.000 a 19.000	19.000 a 96.000	96.000 a 320.000
Areia acima NA	13.000	42.000	160.000
Areia submersa	8.000	26.000	96.000

Fonte: Terzaghi (1955, adaptada apud Souza e Reis, 2008)

**Se a largura, dimensão transversal B, da estaca for diferente de 30cm, é necessário multiplicar os valores da tabela por b/B , sendo $b=30$ cm.

Tipo e nível de carregamento

Velloso e Lopes (2010) citam que como as fundações superficiais precisam atender a um limite de recalques, à tensões atuantes no solo são muito distantes da tensão de ruptura. Sendo assim os valores de módulo de elasticidade que envolvem o estudo de uma fundação superficial são os iniciais da curva de tensão-deformação, sendo também muito distantes do ponto de ruptura.

Quando se fala em estacas, elas podem sofrer esforços horizontais que gerem níveis de mobilização de resistência muito altos podendo chegar à ruptura dos solos superficiais mesmo para estados de limite de serviço (ELS). É importante então saber se o carregamento horizontal é cíclico (como o caso de sismos) e considerar também o nível de mobilização de resistência (VELLOSO e LOPES, 2010).

Analisar se o carregamento horizontal é cíclico é complexo porque há solos que reduzem o módulo de elasticidade quando o carregamento é repetitivo, como solos argilosos sensíveis (VELLOSO e LOPES, 2010). Outros solos, com rigidez maior, não têm o módulo de elasticidade afetado de maneira abrupta.

Os solos superficiais são os mais solicitados pelo carregamento horizontal das estacas, sendo assim, o fator limitante deve ser estudado para eles. Esse estudo é feito de acordo com o comprimento característico da estaca, então primeiramente conhece qual é esse comprimento e verifica quais solos serão solicitados por esse carregamento horizontal. Aplicando-se métodos tradicionais, foi observado que o acréscimo dessas tensões horizontais desaparecem abaixo de 4 a 5 vezes o comprimento característico (VELLOSO e LOPES, 2010).

5.12.3. Coeficiente de mola rotacional

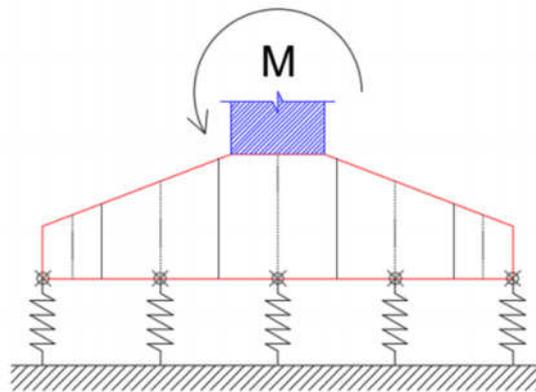
Além do carregamento vertical e horizontal, a fundação, seja ela superficial ou profunda, também pode receber esforços de momentos fletores. Assim, pode-se definir o coeficiente de mola rotacional como sendo:

$$K_{\theta} = \frac{M}{\theta} \quad (37)$$

Onde M é o momento fletor e θ a rotação.

Quando há a presença de momentos fletores, apenas uma mola central não servirá suficiente para a discretização. Será necessária a aplicação de um conjunto de molas na base da sapata, como mostrado na figura 31. Quando se faz isso, deve-se definir um valor para cada mola aplicada considerando a área de influência que cada mola terá (MENDES, 2016).

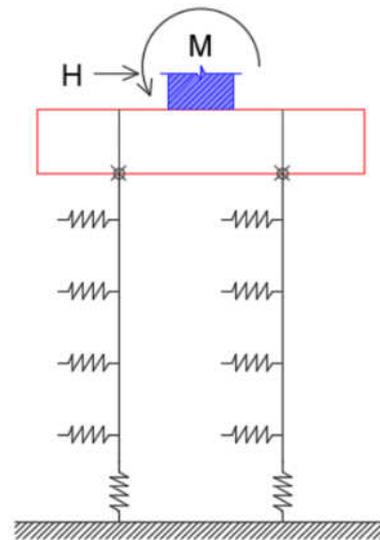
Figura 31 – Rigidez à rotação das sapatas



Fonte: Mendes (2016)

No caso das estacas, além das molas verticais é necessário também aplicar as horizontais, como mostrado na figura 32.

Figura 32 – Rigidez à rotação das estacas



Fonte: Mendes (2016)

6. ANÁLISE DE UM PÓRTICO CONSIDERANDO APOIO ELÁSTICO

6.1.MÉTODO MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS

Em 1826, Navier utilizou o método dos deslocamentos, também conhecido como o método de rigidez, sendo talvez o primeiro a utilizar este método. Já em 1864, J.C. Maxwell e O. Mohr foram os primeiros no uso do método das forças, também conhecido como método de flexibilidade (CRUZ, 2021 no prelo).

O cálculo matricial para o estudo das estruturas, inicialmente, não foi tão utilizado pois gerava grandes sistemas de equações, tornando a solução do problema muito demorada já que era realizada de forma manual. Segundo Cruz (2021, no prelo), apenas depois de 1940, devido ao advento dos computadores, que essa análise por meio de cálculos matriciais começou a ser mais utilizada. No ano de 1944, Kron (apud Cruz, 2021 no prelo) apresentou uma formulação para o cálculo matricial que serviu como base para os posteriores estudos e análises estruturais, tornando assim possível a sua aplicação nas análises estruturais.

Apesar da formulação matricial servir tanto para o método dos deslocamentos quanto para o das forças, o método dos deslocamentos foi o que melhor se adaptou ao cálculo automático (CRUZ, 2021 no prelo).

Atualmente, alguns programas como SAP-200, F-Tool e Sistema MIX são muito utilizados. O SAP-2000 foi introduzido no Brasil pela Multiplus e possibilita a utilização do MEF e do cálculo matricial, além disso ele pode analisar estruturas planas ou espaciais, com ou sem linearidade. O F-Tool possibilita a análise de estruturas planas, como treliças e pórticos, sob comportamento linear. O Sistema MIX é um software que analisa estruturas planas sob comportamento estrutural linear ou não-linear (CRUZ, 2021 no prelo).

O método dos deslocamentos e o das forças são métodos utilizados para analisar, normalmente, estruturas hiperestáticas nas quais os materiais possuem comportamento elasto-linear. Além disso, esse método admite que a deformação da estrutura é limitada a valores muito pequenos.

Tanto o método das forças quanto o dos deslocamentos utilizam três grupos de equação para determinar as solicitações internas da estrutura. Esses grupos de equações são divididos em:

1. Equações de equilíbrio: proveniente das considerações de equilíbrio;
2. Equações de compatibilidade: deslocamentos entre os nós da estrutura e das extremidades das barras;
3. Equações reológicas: relacionam a tensão aplicada com a deformação resultante.

O método dos deslocamentos é formado de casos básicos que respeitam as condições de compatibilidade, mas não as de equilíbrio. O equilíbrio da estrutura é reestabelecido após sobrepor todas as soluções dos casos básicos.

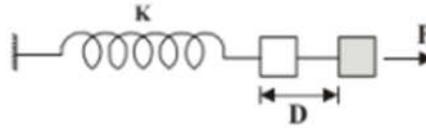
Nesse método, primeiro encontram-se as equações de compatibilidade de deslocamentos e depois as de equilíbrio dos esforços. Nesse método os deslocamentos nodais são as incógnitas que serão encontradas para posteriormente calcular os esforços das barras e as reações de apoio. Sendo assim, a notação matricial será a seguinte:

$$\{P\} = [K].\{D\} \quad (38)$$

Onde $\{P\}$ é o vetor dos esforços externos, $\{D\}$ o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura e $[K]$ a matriz de rigidez da estrutura.

A matriz de rigidez é onde estarão os coeficientes de rigidez da estrutura. Ela sempre será quadrada, simétrica e singular. A figura 33 representa como uma força aplicada gera deslocamento em uma mola.

Figura 33 – Representação de uma força aplicada na mola gerando uma deformação



Fonte: Cruz (2021 no prelo, adaptado)

A matriz de rigidez é onde estarão os coeficientes de rigidez da estrutura. O coeficiente de rigidez K_{ii} é o esforço na coordenada i (P_i), gerado por um deslocamento unitário na coordenada i ($D_i=1$), mantendo todos os demais deslocamentos da estrutura bloqueados. Sendo assim, quando $D_i=1$, seguindo a equação (38), temos que $P_i=K_{ii} \cdot D_i$ e o elemento de rigidez K_{ii} se torna numericamente igual ao esforço gerado (P_i) por esse deslocamento.

No coeficiente de rigidez K_{ij} , o primeiro índice indicará a coordenada do esforço e o segundo índice será a coordenada do deslocamento. Quando o deslocamento e o esforço tiverem o sentido positivo, os coeficientes de rigidez serão maiores que zero.

As equações de força e deslocamento são obtidas a partir das condições de equilíbrio, tendo conhecimento dos coeficientes de rigidez,

$$\begin{aligned} P_1 &= K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 + \dots + K_{19}D_9 \\ P_2 &= \dots K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 + \dots + K_{29}D_9 \\ P_3 &= \dots K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 + \dots + K_{39}D_9 \end{aligned} \quad (39)$$

Onde P_i é o esforço externo nodal na coordenada i ; K_{ij} é o coeficiente de rigidez global da estrutura e D_j é o deslocamento nodal na coordenada j .

Outra representação para esse sistema das equações acima é a forma matricial. A matriz abaixo mostra os esforços nodais, deslocamentos e os coeficientes de rigidez vinculados e não vinculados.

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_C \\ \{P\}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{CC} & [K]_{CR} \\ [K]_{RC} & [K]_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_C \\ \{D\}_R \end{Bmatrix} \quad (40)$$

Onde:

$\{P\}_C$ Esforços externos nodais nas coordenadas não vinculadas.

$\{P\}_R$ Esforços externos nodais nas coordenadas vinculadas (as reações de apoio);

$\{D\}_C$ Deslocamentos nodais nas coordenadas não vinculadas;
 $\{D\}_R$ Deslocamentos nodais nas coordenadas vinculadas;
 $[K]_{CC}, [K]_{CR}, [K]_{RC}, [K]_{RR}$ Submatrizes de rigidez global que associam o esforço externo $\{P\}_C$ ou $\{P\}_R$ ao $\{D\}_C$ ou $\{D\}_R$, sendo o primeiro índice o referente ao esforço e o segundo ao deslocamento.

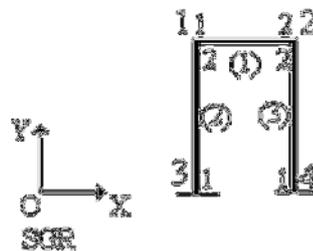
Resolvendo a equação matricial (40), obtém-se:

$$\begin{aligned} \{P\}_C &= [K]_{CC} \{D\}_C + [K]_{CR} \{D\}_R \\ \{P\}_R &= [K]_{RC} \{D\}_C + [K]_{RR} \{D\}_R \end{aligned} \quad (41)$$

Se a estrutura estiver apoiada em base deformável, serão aplicadas molas nas coordenadas deformáveis e o cálculo matricial da estrutura deverá considerar as molas. Essa consideração se faz através da representação das molas como sendo barras, assim surgirá uma nova barra e um novo nó na estrutura.

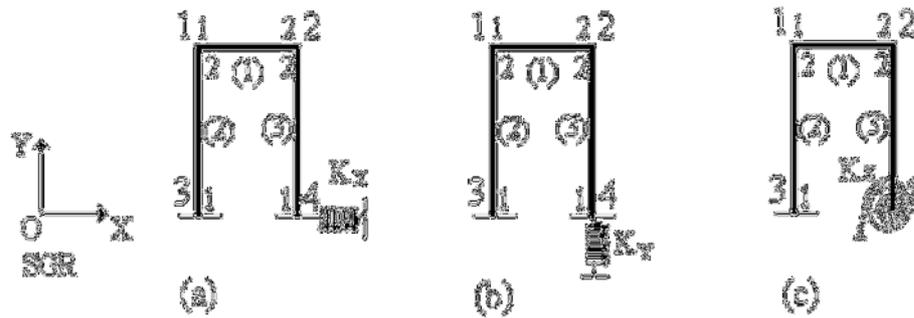
Na figura 34 o nó 4 é considerado indeslocável enquanto que na figura 35 esse mesmo nó está sobre a ação das molas nas três direções. A representação de cada mola é mostrada na figura 36 por meio de acréscimo de uma nova barra, a (4) e um novo nó, o 5. As molas que foram substituídas por uma notação de barra biarticulada possuem uma rigidez axial $k=EA/L$ que deve ser igual ao k da mola que está sendo representado.

Figura 34 – Estrutura com apoios rígidos



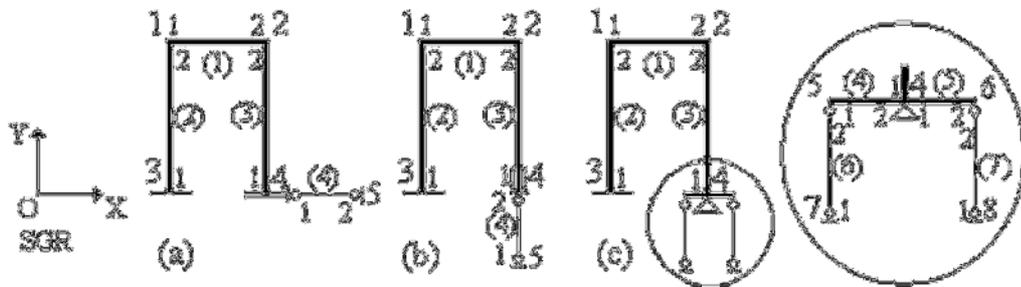
Fonte: CRUZ (2021, no prelo)

Figura 35 – Aplicação de molas nos apoios de um pórtico



Fonte: CRUZ (2021, no prelo)

Figura 36 – Barras biarticuladas para representar as molas



Fonte: CRUZ (2021, no prelo)

Nesse trabalho, para fins didáticos, uma estrutura reticulada plana foi analisada. O estudo foi em torno de um pórtico hiperestático que possui um comportamento elasto-linear resolvido através do método dos deslocamentos.

6.1.1. Coeficientes de rigidez

No método dos deslocamentos o deslocamento unitário aplicado para posteriormente encontrar os esforços provocados por eles, torna esse esforço numericamente igual ao coeficiente de rigidez da barra ou da estrutura.

Em estruturas espaciais em cada nós da barra há seis coeficientes enquanto em estruturas planas, em cada extremidade de barra há três coeficientes.

Os coeficientes de rigidez podem ser classificados como coeficiente de rigidez da barra, k_{ij} , ou da estrutura, K_{ij} . Para melhor entendimento, todos os esforços, deslocamentos ou coeficientes de rigidez referentes à barra serão internos e estarão notados em letra minúscula (p, d, k) enquanto os referentes aos nós, serão externos e serão notados em letras maiúsculas

(P, D, K). Além disso, o eixo local (x,y) será o referente à barra e o eixo global (X,Y), à estrutura.

Como a estrutura a ser estudada neste trabalho foi um pórtico, foi falado apenas sobre estruturas planas sendo considerados somente os efeitos de 1ª ordem, de comportamento elasto-linear. Esses efeitos de 1ª ordem são aqueles provenientes da ação de esforços externos na estrutura na sua configuração inicial indeformada, sem deslocamentos e deformações prévios.

Quando os deslocamentos são muito pequenos, eles podem ser desprezíveis e pode-se considerar a teoria de primeira ordem para a análise da estrutura, ou seja, o estudo pode ser feito considerando a configuração indeformada da estrutura. Quando esses deslocamentos não são desprezíveis o estudo passa a ser feito com a estrutura deformada e então considera-se os chamados efeitos de segunda ordem.

No caso de estruturas planas, há 3 coeficientes de rigidez em cada extremidade da barra (coeficientes da barra, k_{ij}) e do nó (coeficientes da estrutura, K_{ij}), como mostrado na figura 37.

Figura 37 – Direções dos coeficientes de rigidez para uma barra biengastada de um pórtico



Fonte: Cruz (adaptada, 2021 no prelo)

Os nós estão indicados em vermelhos e as direções são os números restantes.

Para cada direção de deslocamento unitário, coeficientes de rigidez serão encontrados. Basta analisar o local de aplicação do deslocamento unitário, a sua direção e ver como os outros pontos reagem à solicitação. No Anexo A encontram-se as tabelas indicando o coeficiente de rigidez de cada direção de acordo com o deslocamento unitário aplicado, em barras com ou sem articulação.

6.2. ETAPAS DE CÁLCULO

A seguir será explicado o passo a passo de como calcular uma estrutura, tendo ela coeficientes de mola ou não pelo método matricial dos deslocamentos baseado em Cruz (2021, no prelo).

1º passo: Definir o Sistema Global de referência (SGR); a numeração dos nós e barras e a incidência das barras.

2º passo: Determinar a matriz de rigidez, de rotação e de incidência no Sistema Local de Referência (SLR) de cada barra da estrutura.

Como a estrutura que será resolvida por análise matricial será um pórtico, o foco desse tópico será para barras de pórticos.

A matriz de rigidez é formada pelos coeficientes de rigidez referente à cada direção em cada extremidade da barra. Para barra de treliça, pórtico ou grelha, a formatação segue a imagem abaixo.

$$[k] = \begin{bmatrix} [k]_{i,i} & [k]_{i,j} \\ [k]_{j,i} & [k]_{j,j} \end{bmatrix}$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Onde o elemento k_{ij} , o índice “i” indica a direção que está sendo aplicado o deslocamento e o índice “j” a direção que está recebendo o efeito do deslocamento.

As matrizes de rigidez das barras de pórticos são da ordem 6x6 e os seus valores são encontrados de acordo com o anexo A. As submatrizes são de ordem 3x3.

Para barra engastada e articulada tem-se:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^3} & \frac{3EI}{L^2} & 0 & -\frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & \frac{3EI}{L^2} & \frac{3EI}{L} & 0 & -\frac{3EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EI}{L^3} & -\frac{3EI}{L^2} & 0 & \frac{3EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Para barra biengastada tem-se:

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (44)$$

Para barras que representam as molas, a notação é a demonstrada na matriz abaixo. Essa notação mostra para três molas aplicadas nas duas extremidades da barra. Caso seja aplicada apenas uma mola em uma direção, torna-se nulo os valores das outras molas.

$$[k] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & -k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & -k_z \\ -k_x & 0 & 0 & k_x & 0 & 0 \\ 0 & -k_y & 0 & 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & -k_z & 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (45)$$

Onde $[k]_{I,I}$ é a matriz referente ao deslocamento unitário aplicado na extremidade I da barra e o efeito ainda nessa extremidade I, a $[k]_{I,II}$ é o deslocamento aplicado na extremidade I e como ele se reflete na extremidade II. A $[k]_{II,I}$ segue a mesma lógica da $[k]_{I,II}$ e a $[k]_{II,II}$ é a que aplica o deslocamento unitário na extremidade II e como a extremidade I reage. Vale

ressaltar que essa matriz ainda está no seu SLR e só após a matriz de rotação que ela será referida ao SGR. Para barras de pórticos cada submatriz de rigidez é da ordem 3x3.

Já a matriz de rotação, ela é formada pelas submatrizes de cada extremidade da barra e representa a posição da barra, ou o SLR, em relação ao SGR sendo α o ângulo da barra em relação ao SGR. Para uma barra de pórtico, a configuração da matriz de rotação é mostrada a seguir.

$$[T] = \begin{bmatrix} [T]_{I,I} & [T]_{I,II} \\ [T]_{II,I} & [T]_{II,II} \end{bmatrix}$$

$$[T]_{(i)} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Na matriz de incidência, a quantidade de colunas é a quantidade de nós da estrutura e as linhas se referem às extremidades de cada barra. Em uma estrutura de 6 nós, se a extremidade I da barra (2) é no nó 1, por exemplo, e a extremidade II no nó 3, a matriz de transformação [a] será a mostrada a seguir.

$$[a]_{(2)} = \begin{bmatrix} [I] & [0] & [0] & [0] & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [I] & [0] & [0] & [0] \end{bmatrix} \quad (47)$$

Cada submatriz da matriz de incidência, para barras de um pórtico, é da ordem 3x3.

3º passo: Calcular os vetores $\{p_0\}$, no SLR, e $\{p_0\}'$, referida ao SGR, de cada barra. Essas matrizes são referentes aos esforços ao longo da barra. Esses valores também são encontrados usando as tabelas do Anexo A.

4º passo: Vetores $\{P_0\}$, $\{P\}$ e $\{D\}$. O vetor $\{P_0\}$ pode ser obtido através da fórmula,

$\sum_{i=1}^n [a]_{(i)}^T \{p_0\}_{(i)}$, onde n é o número de barras e i é a barra.

$$\{P_0\}^T = \{\{P_0\}_1^T \quad \{P_0\}_2^T \quad \{P_0\}_3^T \quad \{P_0\}_4^T \quad \{P_0\}_5^T\} \quad (48)$$

Já os vetores $\{P\}$ e $\{D\}$ seguem a notação a seguir.

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \\ \{P\}_3 \\ \{P\}_4 \\ \{P\}_5 \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} \{D\}_1 \\ \{D\}_2 \\ \{D\}_3 \\ \{D\}_4 \\ \{D\}_5 \end{Bmatrix} \quad (49)$$

5º passo: Com a matriz de rigidez no SLR ($[k]$) e a matriz de rotação ($[T]$), é encontrada a matriz de rigidez da barra referida ao SGR ($[k]'$) usando a equação abaixo.

$$[k]' = [T][k][T]^{-1} \quad (50)$$

6º passo: Obtenção da matriz de rigidez da estrutura, $[K]$. A equação abaixo fornece o procedimento prático de cálculo.

$$[K] = \sum_{i=1}^n [a]_{(i)}^T [k]'_{(i)} [a]_{(i)} \quad (51)$$

A matriz de rigidez posteriormente montará a equação $\{P\} = [K]\{D\}$.

7º passo: A solução da equação abaixo será feita em duas partes separadas que depois se juntarão.

$$\{P\} = [K]\{D\} + \{P_0\} \quad (52)$$

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_C \\ \{P\}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{cc} & K_{cr} \\ K_{rc} & K_{rr} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{D\}_C \\ \{D\}_R \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{P_0\}_C \\ \{P_0\}_R \end{Bmatrix}$$

O índice “R” faz referência a situação de quando o apoio é desconhecido e o deslocamento conhecido. Já o “c” tem a ideia contrária, esforços externos conhecidos e deslocamentos desconhecidos.

Resolvendo a equação matricial (52), encontra-se a equação matricial (53) que servirá para calcular os deslocamentos nodais.

$$\{P\}_C - \{P_0\}_C = [K]_{CC}\{D\}_C \quad (53)$$

Com os deslocamentos encontrados a partir da equação acima, é possível encontrar os esforços de reação da estrutura.

$$\{P\}_R - \{P_0\}_R = [K]_{RC}\{D\}_C + [K]_{RR}\{D\}_R \quad (54)$$

8º passo: Com as equações de compatibilidade, para cada nó, encontradas, é possível descobrir o vetor dos deslocamentos das extremidades das barras no SGR, $\{d\}'$. E, em seguida, acha-se o vetor dos deslocamentos de cada barra no SLR, $\{d\}$.

$$\{d\}'_{(b)} = [a]_{(b)}\{D\} \quad (55)$$

$$\{d\}_{(i)} = [T]_{(i)}^T \{d\}'_{(i)} \quad (56)$$

Por fim, para achar o vetor dos esforços que atua nas barras utiliza a fórmula abaixo.

$$\{p\} = [k]\{d\} \quad (57)$$

6.3. ANÁLISE DA ESTRUTURA 1 – PÓRTICO

Para este tópico, três casos para o mesmo pórtico serão resolvidos. Para melhor entendimento, cada caso será chamado pela sua numeração correspondente.

Caso 1: Um apoio totalmente vinculado e o outro vinculado em duas direções (x e z) e com uma mola horizontal. Com análise matricial.

Caso 2: Dois apoios totalmente vinculados. Sem análise matricial.

Caso 3: Um apoio com vinculação total e o outro com molas nas três direções (x,y,z). Sem análise matricial.

Na primeira análise o pórtico será calculado para dois apoios indeslocáveis, sem molas, com vinculação total, ou seja, indeslocável nas três direções (X,Y,Z). Nessa análise as molas de Winkler e consequentemente a interação solo-estrutura não será considerada.

A análise matricial será realizada para o pórtico com 3 barras. A barra horizontal possui uma carga uniformemente distribuída vertical de 15kN/m e uma carga nodal de 3kN na direção do eixo horizontal x. Em relação aos apoios da estrutura, um será indeslocável, com vinculação total, ou seja, indeslocável nas três direções (x,y,z) e o outro com vinculação nos eixos x e z e com uma mola na direção do eixo y (eixo vertical do plano).

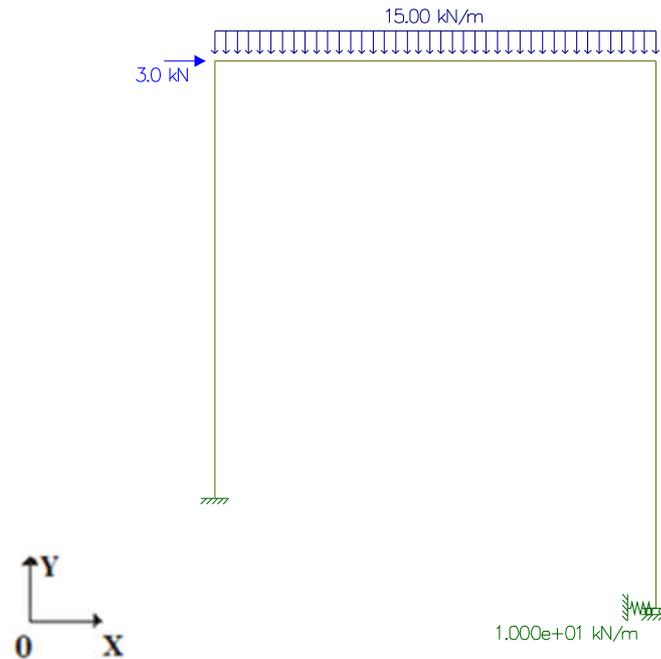
Os resultados da análise matricial realizada manualmente será comparada com os resultados do FTool, comprovando o cálculo.

Em seguida, também com o Ftool serão calculados outros dois casos com o mesmo pórtico mas com vinculações de apoio diferentes. Os resultados de cada um serão obtidos e ao final, comparados.

6.3.1. Caso 1 – Análise matricial

O caso um será o que receberá o cálculo por análise matricial. O pórtico será o representado pela figura 38.

Figura 38 – Pórtico com um apoio elástico em uma direção



Fonte: Autora

Dados da superestrutura:

Seção: 20 cm x 20 cm

Área = 400cm²

L₁=L₂= 4m

L₃= 5m

As barras da estrutura deverão ser posicionadas de modo a obter a melhor inércia e consequentemente a maior estabilidade. Sendo assim:

$$I_x = \frac{20 \times 20^3}{12} = 13333,33 \text{ cm}^4$$

O módulo de elasticidade da estrutura será considerado para agregados graníticos ($\gamma_c = 1$) e considerando um $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$.

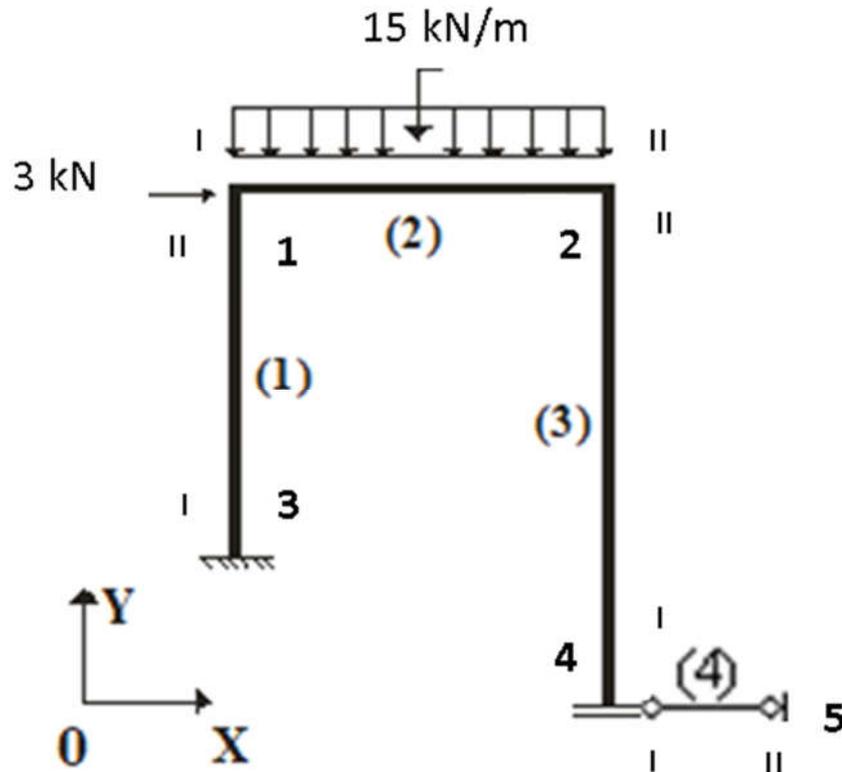
$$E = \gamma_c \times 5600 \times f_{ck}^{1/2} = 28.000 \text{ MPa} = 28 \text{ GPa}$$

O coeficiente de mola horizontal ($K_{m,h}=K_x$) foi considerado 10 kN/m.

a) 1º PASSO: Discretização da estrutura

Conhecida a estrutura, os nós e as barras são numerados, como mostrado na figura 39.

Figura 39 – Discretização do pórtico



Fonte: Cruz (adaptada, 2021 no prelo)

b) 2º PASSO: Matriz de rigidez, matriz de rotação e matriz de incidência

b.1) Matriz de rigidez

- Barra (1), $[k]_{(1)}$

$$[k]_{(1)} = \begin{bmatrix} 280000 & 0 & 0 & -280000 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 1400 & 0 & -700 & 1400 \\ 0 & 1400 & 3733 & 0 & -1400 & 1867 \\ -280000 & 0 & 0 & 280000 & 0 & 0 \\ 0 & -700 & -1400 & 0 & 700 & -1400 \\ 0 & 1400 & 1867 & 0 & -1400 & 3733 \end{bmatrix}$$

- Barra (2), $[k]_{(2)}$

Como a barra 2 tem mesmo comprimento, mesma seção e mesmo material da barra 1, as condições de contorno são as mesmas e assim, $[k]_{(1)} = [k]_{(2)}$.

- Barra (3), $[k]_{(3)}$

$$[k]_{(3)} = \begin{bmatrix} 224000 & 0 & 0 & -224000 & 0 & 0 \\ 0 & 358 & 896 & 0 & -358 & 896 \\ 0 & 896 & 2987 & 0 & -896 & 1493 \\ -224000 & 0 & 0 & 224000 & 0 & 0 \\ 0 & -358 & -896 & 0 & 358 & -896 \\ 0 & 896 & 1493 & 0 & -896 & 2987 \end{bmatrix}$$

- Barra (4), $[k]_{(4)}$

$$[k]_{(4)} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -10 & 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b.2) Matriz de rotação

- Barra (1), $[T]_{(1)}$, com $\alpha=90^\circ$

$$[T]_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Barra (2), $[T]_{(2)}$, com $\alpha=0^\circ$

$$[T]_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Barra (4), $[a]_{(4)}$

$$[a]_{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

c) 3º PASSO: Vetores $\{p_0\}$, no SLR, e $\{p_0\}'$, no SGR

A barra 2 é a única que recebe carga ao longo do seu eixo longitudinal, os vetores das barras restantes são nulos.

$$\{p_0\}_{(1)} = \{p_0\}_{(3)} = \{p_0\}_{(4)} = 0$$

$$\{p_0\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 30 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

Como os vetores $\{p\}_{(1)}$, $\{p\}_{(3)}$, $\{p\}_{(4)}$ são nulos, $\{p\}'_{(1)}$, $\{p\}'_{(3)}$, $\{p\}'_{(4)}$ também serão nulos. Para a barra 2, como $[T]_{(2)} = [I]$, $\{p\}_{(2)}$ e $\{p\}'_{(2)}$ são iguais.

$$\{p_0\}_{(1)} = \{p_0\}_{(3)} = \{p_0\}_{(4)} = \{p_0\}'_{(1)} = \{p_0\}'_{(3)} = \{p_0\}'_{(4)} = 0$$

$$\{p_0\}_{(2)} = \{p_0\}'_{(2)}$$

d) 4º PASSO: Vetores $\{P_0\}$, $\{P\}$ e $\{D\}$

Como os vetores $\{p\}'_{(1)}$, $\{p\}'_{(3)}$, $\{p\}'_{(4)}$ são nulos, a expressão se reduz à $\{P_0\} = [a]_{(2)}^T \{p_0\}_{(2)}$.

Logo:

$$\{P_0\}^T = \left\{ \{P_0\}_1^T \quad \{P_0\}_2^T \quad \{P_0\}_3^T \quad \{P_0\}_4^T \quad \{P_0\}_5^T \right\}$$

$$\{P_0\}^T = \{ 0 \ 30 \ 20 \ 0 \ 30 \ -20 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \}$$

Para os nós vinculados, os deslocamentos são nulos e as reações desconhecidas. Para os sem vínculos, os deslocamentos são as incógnitas e as reações nulas.

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \\ \{P\}_3 \\ \{P\}_4 \\ \{P\}_5 \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} \{D\}_1 \\ \{D\}_2 \\ \{D\}_3 \\ \{D\}_4 \\ \{D\}_5 \end{Bmatrix}$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P7 \\ P8 \\ P9 \\ 0 \\ P11 \\ P12 \\ P13 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

g) 5º PASSO: Matriz de rigidez de cada barra referente ao sistema global da estrutura, $[k]$ '

Para obtenção dessa matriz, a expressão utilizada será $[k]' = [T][k][T]^T$.

- Barra (1) no SGR, $[k]'_{(1)}$

$$[k]'_{(1)} = \begin{bmatrix} 700 & 0 & -1400 & -700 & 0 & -1400 \\ 0 & 280000 & 0 & 0 & -280000 & 0 \\ -1400 & 0 & 3733 & 1400 & 0 & 1867 \\ -700 & 0 & 1400 & 700 & 0 & 1400 \\ 0 & -280000 & 0 & 0 & 280000 & 0 \\ -1400 & 0 & 1867 & 1400 & 0 & 3733 \end{bmatrix}$$

- Barra (2) no SGR, $[k]'_{(2)}$

Para a barra 2, como $[T]_{(2)}=[I]$, $[k]_{(2)}=[k]'_{(2)}$.

$$[k]'_{(2)} = \begin{bmatrix} 280000 & 0 & 0 & -280000 & 0 & 0 \\ 0 & 700 & 1400 & 0 & -700 & 1400 \\ 0 & 1400 & 3733 & 0 & -1400 & 1867 \\ -280000 & 0 & 0 & 280000 & 0 & 0 \\ 0 & -700 & -1400 & 0 & 700 & -1400 \\ 0 & 1400 & 1867 & 0 & -1400 & 3733 \end{bmatrix}$$

- Barra (3) no SGR, $[k]'_{(3)}$

$$[k]'_{(3)} = \begin{bmatrix} 358 & 0 & -896 & -358 & 0 & -896 \\ 0 & 224000 & 0 & 0 & -224000 & 0 \\ -896 & 0 & 2987 & 896 & 0 & 1493 \\ -358 & 0 & 896 & 358 & 0 & 896 \\ 0 & -224000 & 0 & 0 & 224000 & 0 \\ -896 & 0 & 1493 & 896 & 0 & 2987 \end{bmatrix}$$

- Barra (4) no SGR, $[k]'_{(4)}$

Para a barra 2, como $[T]_{(4)}=[I]$, $[k]_{(4)}=[k]'_{(4)}$.

h) 6º PASSO: Matriz de rigidez da estrutura, $[K]$.

A matriz da estrutura $[K]$ é calculada pela equação (51).

A equação mostra que será realizado um somatório das rigidezes das barras, a soma será de elemento por elemento após o produto escalar da matriz de incidência transposta, matriz de rigidez da barra e matriz de incidência da barra.

Da equação (53), os deslocamentos são obtidos:

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 30 \\ -20 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 280700 & 0 & 1400 & -280000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 280700 & 1400 & 0 & -700 & 1400 & 0 \\ 1400 & 1400 & 7467 & 0 & -1400 & 1867 & 0 \\ -280000 & 0 & 0 & 280358 & 0 & 896 & -358 \\ 0 & -700 & -1400 & 0 & 224700 & -1400 & 0 \\ 0 & 1400 & 1867 & 896 & -1400 & 6720 & -896 \\ 0 & 0 & 0 & -358 & 0 & -896 & 368 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D1 \\ D2 \\ D3 \\ D4 \\ D5 \\ D6 \\ D10 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 280700D1 + 1400D3 - 280000D4 \\ 280700D2 + 1400D3 - 700D5 + 1400D6 \\ 1400D1 + 1400D2 + 7467D3 - 1400D5 + 1867D6 \\ -280000D1 + 280358D4 + 896D6 - 358D10 \\ -700D2 - 1400D3 + 224700D5 - 1400D6 \\ 1400D2 + 1867D3 + 896D4 - 1400D5 + 6720D6 - 896D10 \\ -358D4 - 896D6 + 368D10 \end{array} \right\} = \begin{Bmatrix} 3 \\ -30 \\ -20 \\ 0 \\ -30 \\ 20 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

As tabelas 10 e 11 mostram os valores de deslocamentos e esforços da estrutura.

Tabela 10 – Valores dos deslocamentos dos nós não vinculados da estrutura

D1	0,020788749	m
D2	-0,000103543	m
D3	-0,008531514	rad
D4	0,020787349	m
D5	-0,000138428	m
D6	0,007794179	rad
D10	0,039199606	m

Fonte: Autora

Com o resultado dos deslocamentos e seguindo a equação (54):

$$\begin{Bmatrix} P7 \\ P8 \\ P9 \\ P11 \\ P12 \\ P13 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -700 & 0 & -1400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -280000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1400 & 0 & 1867 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -224000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 896 & 0 & 1493 & -896 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0,020788749 \\ -0,000103543 \\ -0,008531514 \\ 0,020787349 \\ 0,000138428 \\ 0,007794179 \\ 0,039199606 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 700 & 0 & -1400 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 280000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1400 & 0 & 3733 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 224000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2987 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Tabela 11 – Valores dos esforços dos nós vinculados da estrutura

P7	-2,61	KN
P8	28,99	KN
P9	13,18	KNm
P11	31,01	KN
P12	-4,86	KNm
P13	-0,39	KN

Fonte: Autora

j) **8º PASSO: Encontrar os deslocamentos e esforços nas extremidades das barras.**

Com os esforços e deslocamentos nodais mostrados na tabela 12, será possível encontrar os deslocamentos e esforços nas extremidades de cada barra.

Tabela 12 – Valores de esforços e dos deslocamentos dos nós da estrutura

nó 1	P1	3	kN	D1	0,02078875	m
	P2	0	kN	D2	-0,00010354	m
	P3	0	kNm	D3	-0,00853151	rad
nó 2	P4	0	kN	D4	0,02078735	m
	P5	0	kN	D5	-0,00013843	m
	P6	0	kNm	D6	0,00779418	rad
nó 3	P7	-2,61	kN	D7	0	m
	P8	28,99	kN	D8	0	m
	P9	13,18	kNm	D9	0	rad
nó 4	P10	0	kN	D10	0,03919961	m
	P11	31,01	kN	D11	0	m
	P12	-4,86	kNm	D12	0	rad
nó 5	P13	-0,39	kN	D13	0	m
	P14	0	kN	D14	0	m
	P15	0	kNm	D15	0	rad

Fonte: Autora

Para encontrar os deslocamentos na barra no SGR, utiliza-se da equação (55) e para encontrar os deslocamentos da barra no SLR, a equação (56) é a seguida.

- Barra (1) no SGR, $\{d\}'_{(1)}$, e no SLR, $\{d\}_{(1)}$

$$\{d\}'_{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,020788749 \\ -0,000103543 \\ -0,008531514 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,000103543 \\ -0,020788749 \\ -0,008531514 \end{Bmatrix}$$

- Barra (2) no SGR, $\{d\}'_{(2)}$, e no SLR, $\{d\}_{(2)}$

$$\{d\}'_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,020788749 \\ -0,000103543 \\ -0,008531514 \\ 0,020787349 \\ -0,000138428 \\ 0,007794179 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,020788749 \\ -0,000103543 \\ -0,008531514 \\ 0,020787349 \\ -0,000138428 \\ 0,007794179 \end{Bmatrix}$$

- Barra (3) no SGR, $\{d\}'_{(3)}$, e no SLR, $\{d\}_{(3)}$

$$\{d\}'_{(3)} = \begin{Bmatrix} 0,039199606 \\ 0 \\ 0 \\ 0,020787349 \\ -0,000138428 \\ 0,007794179 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,039199606 \\ 0 \\ -0,000138428 \\ -0,020787349 \\ 0,007794179 \end{Bmatrix}$$

- Barra (4) no SGR, $\{d\}'_{(4)}$, e no SLR, $\{d\}_{(4)}$

$$\{d\}'_{(4)} = \begin{Bmatrix} 0,039199606 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{d\}_{(4)} = \begin{Bmatrix} 0,039199606 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Com os deslocamentos no SLR das barras, pode-se finalmente encontrar os esforços de cada barra, também no SLR, através da equação (57).

- Barra (1) no SLR, $\{p\}_{(1)}$

$$\{p\}_{(1)} = \begin{Bmatrix} 29,0 \\ 2,6 \\ 13,2 \\ -29,0 \\ -2,6 \\ -2,7 \end{Bmatrix}$$

- Barra (2) no SLR, $\{p\}_{(2)}$

$$\{p\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,4 \\ -1,0 \\ -17,3 \\ -0,4 \\ 1,0 \\ 13,2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{p_0\}_{(2)} \\ 0 \\ 30 \\ 20 \\ 0 \\ 30 \\ -20 \end{Bmatrix} \Rightarrow \{p\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 29,0 \\ 2,7 \\ -0,4 \\ 31,0 \\ -6,8 \end{Bmatrix}$$

- Barra (3) no SLR, $\{p\}_{(3)}$

$$\{p\}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 31,0 \\ 0,4 \\ -4,9 \\ -31,0 \\ -0,4 \\ 6,8 \end{Bmatrix}$$

- Barra (4) no SLR, $\{p\}_{(4)}$

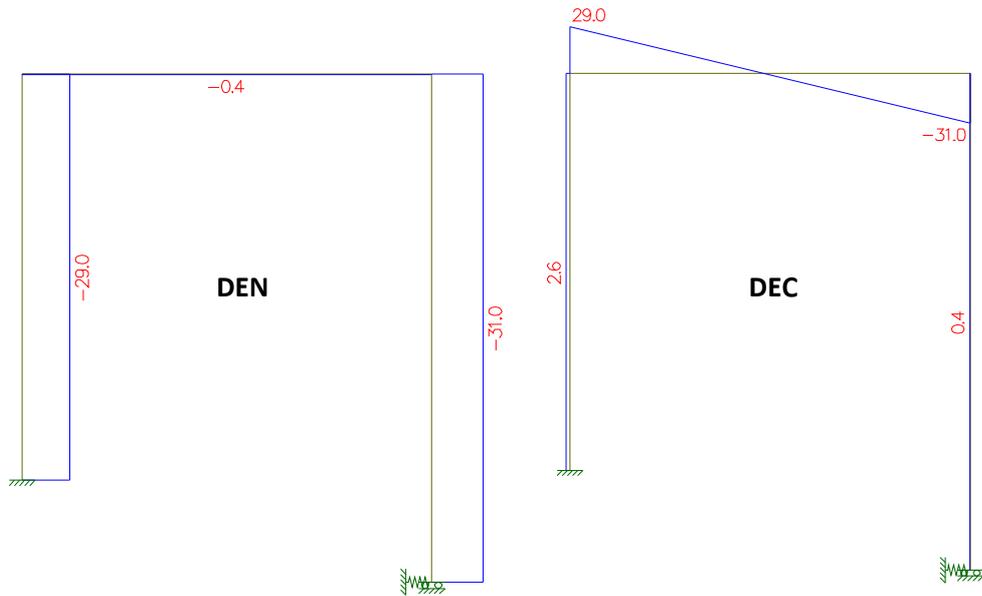
$$\{p\}_{(4)} = \begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ -0,4 \\ 0,0 \\ 0,0 \end{Bmatrix}$$

6.3.1.1.Ftool

A mesma estrutura foi lançada no Ftool para obter os resultados do programa e, posteriormente, fazer o comparativo de resultados e confirmar a análise matricial. As figuras 40 e 41 mostram esses resultados obtidos no programa.

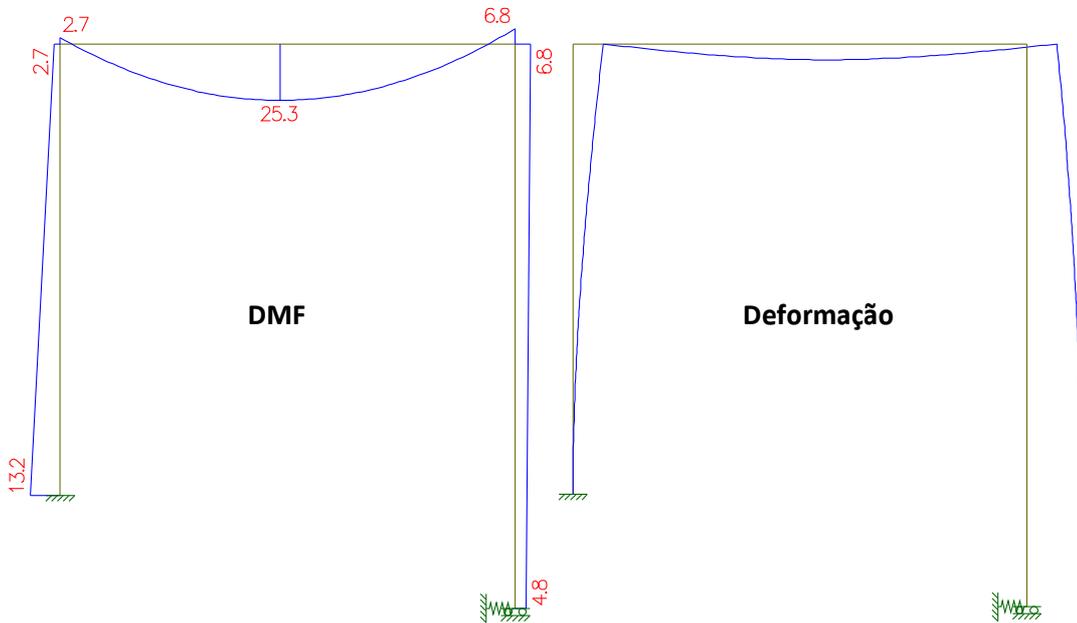
Todos os diagramas de esforços normais (DEN) serão dados em kN, todos os diagramas de esforços cortantes (DEC) em kN, todos os diagramas de momentos fletores (DMF) em kNm e todas as deformadas em mm.

Figura 40 – DEN e DEC do pórtico (Caso 1)



Fonte: Autora

Figura 41 – DMF e deformação do pórtico (Caso 1)



Fonte: Autora

6.3.1.2. Comparativo dos resultados da análise matricial e do Ftool

Com os resultados tanto da análise matricial quanto do programa Ftool, é confirmado que o cálculo foi feito de maneira correta. A tabela 13 mostra o comparativo dos resultados dos esforços nos apoios do pórtico. Já a tabela 14 mostra os esforços internos em cada extremidade das barras.

Tabela 13 – Comparativo de resultados dos esforços de apoio do pórtico

Nós/Esforços		Análise Matricial	Ftool	Und.
nó 3	P7	-2,61	- 2,6	kN
	P8	28,99	29,0	kN
	P9	13,18	13,2	kNm
nó 4	P10	0	0	kN
	P11	31,01	31,0	kN
	P12	-4,86	- 4,8	kNm
nó 5	P13	-0,39	- 0,4	kN
	P14	0	0	kN
	P15	0	0	kNm

Fonte: Autora

Tabela 14 – Comparativo de resultados dos esforços internos das barras

Extremidades/ Esforços da barra	Barra 1		Barra 2		Barra 3		Und.	
	A.M*	Ftool	A.M*	Ftool	A.M*	Ftool		
Ext. I	p1	29,0	29,0	0,4	0,4	31,0	31,0	kN
	p2	2,6	2,6	29,0	29,0	0,4	0,4	kN
	p3	13,2	13,2	2,7	2,7	-4,9	-4,8	kNm
Ext. I	p4	-29,0	-29,0	-0,4	-0,4	-31,0	-31,0	kN
	p5	-2,6	-2,6	31,0	31,0	-0,4	-0,4	kN
	p6	-2,7	-2,7	-6,8	-6,8	6,8	6,8	kNm

*Análise Matricial

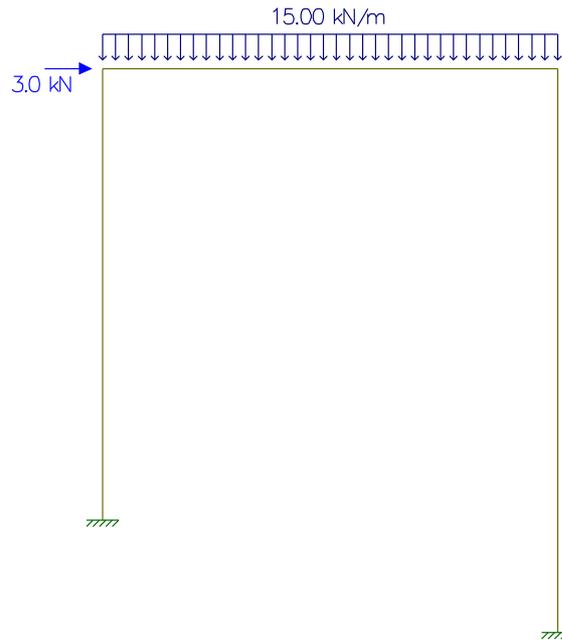
Fonte: Autora

As diferenças de casas decimais se deram por diferenças de aproximação de resultados. Feita a análise matricial de um pórtico com uma mola horizontal em um de seus apoios, os próximos casos vão mostrar o caso sem mola e o caso com três molas em um dos apoios.

6.3.2. Caso 2

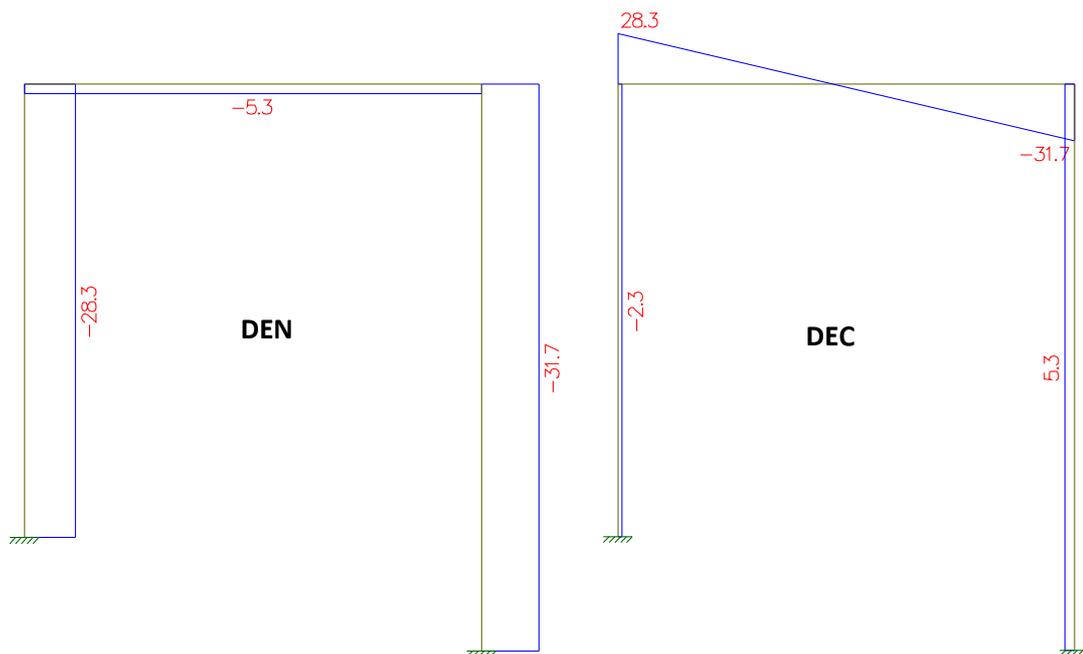
Para este caso, os dois apoios estarão totalmente vinculados, ver figura 42. As figuras 43 e 44 mostram os resultados obtidos para a configuração apresentada na figura 42.

Figura 42 – Pórtico com 2 apoios totalmente vinculados



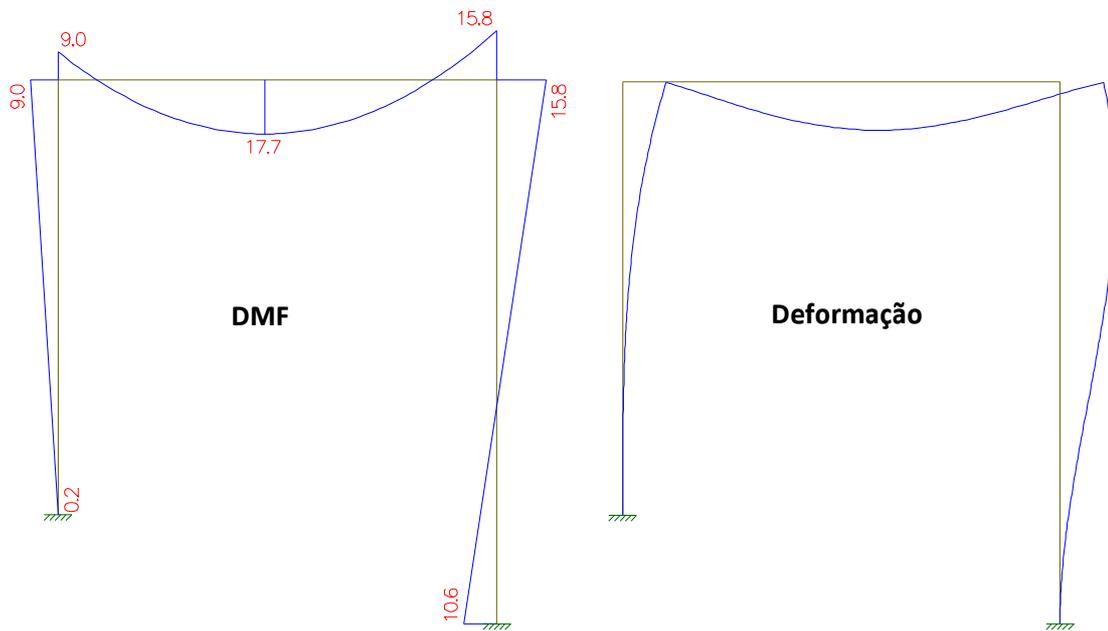
Fonte: Autora

Figura 43 – DEN e DEC do pórtico (Caso 2)



Fonte: Autora

Figura 44 – DMF e deformação do pórtico (Caso 2)



Fonte: Autora

6.3.3. Caso 3

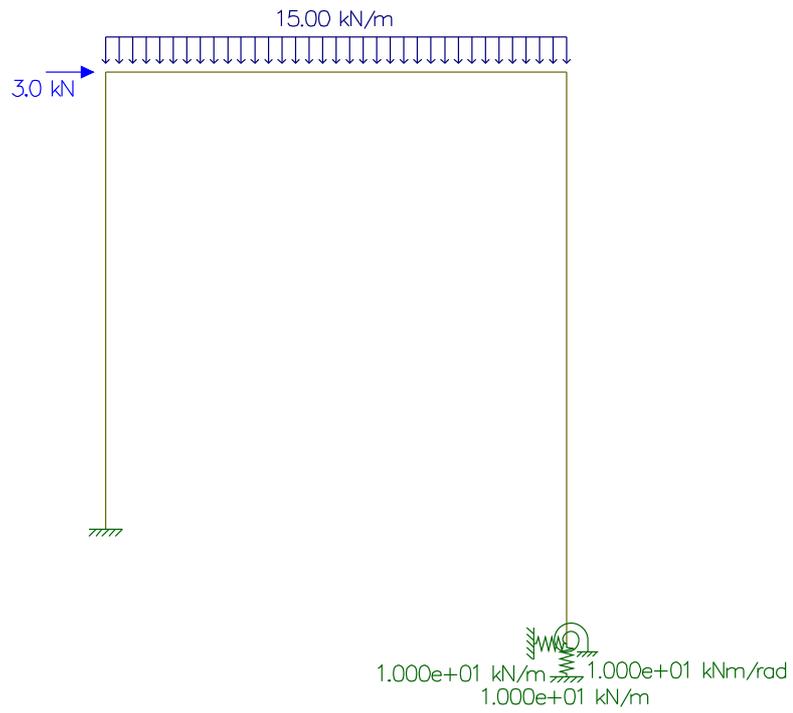
Para este caso, um apoio estará totalmente vinculado e o outro receberá a aplicação de molas nas três direções, admitindo, então, deslocamentos, como mostrado na figura 45. As figuras 46 e 47 mostram os resultados obtidos para a configuração apresentada na figura 45.

Apenas para cálculo, sem levar em consideração conceitos geotécnicos, foram definidos os seguintes valores de coeficientes de mola.

$$K_x = K_y = 10 \text{ kN/m}$$

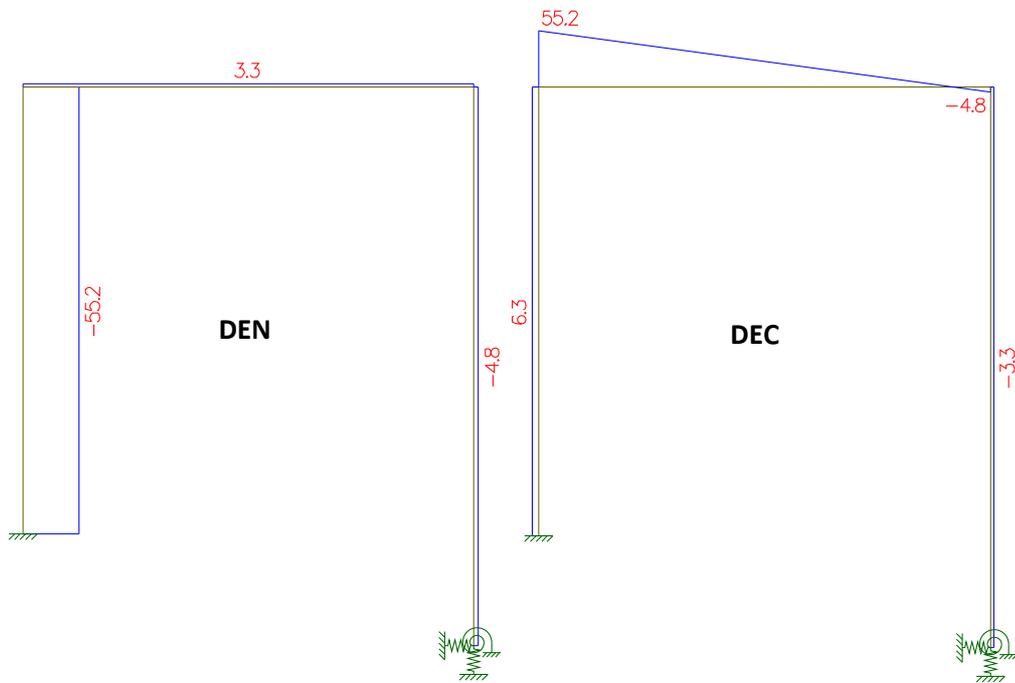
$$K_z = 10 \text{ kNm/rad}$$

Figura 45 – Pórtico com um apoio elástico em três direções

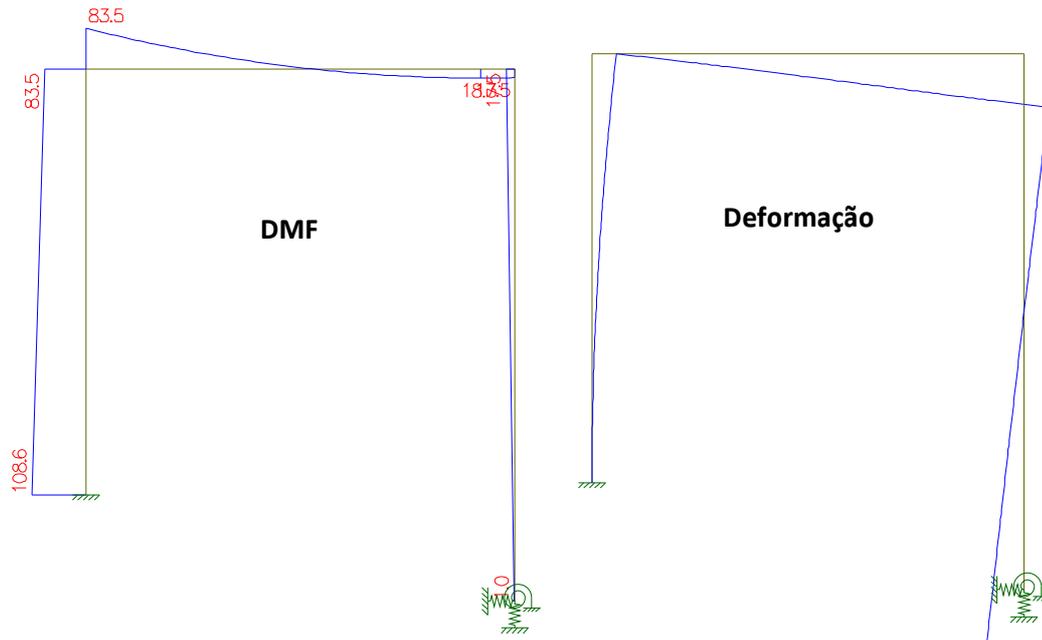


Fonte: Autora

Figura 46 – DEN e DEC do pórtico (Caso 3)



Fonte: Autora

Figura 47 – DMF e deformação do pórtico (Caso 3)

Fonte: Autora

6.3.4. Comparativo de resultados dos 3 casos

6.3.4.1. Deslocamentos nodais e reações de apoio

O valor de 10 kN/m para os coeficientes de molas verticais e horizontais e 10kNm/rad para o coeficiente de mola angular foram aplicados de forma arbitrária. Para melhor entendimento dos resultados, esses valores, apesar de não representarem um significado geotécnico real, indicam um solo de baixíssima capacidade de suporte.

Primeiramente serão analisadas as reações de apoios e os deslocamentos nodais nos três casos mostrados. A tabela 15 mostra os esforços dos nós da estrutura e a tabela 16 mostra os deslocamentos dos nós.

Tabela 15 – Esforços dos nós da estrutura

Nó	Caso 1 - com k_x	Caso 2 - sem base elástica	Caso 3 - com k_x, k_y e k_z
Nó 1	0 kN	0 kN	0 kN
	0 kN	0 kN	0 kN
	0 kNm	0 kNm	0 kNm
Nó 2	0 kN	0 kN	0 kN

Nó	Caso 1 - com kx	Caso 2 - sem base elástica	Caso 3 - com kx, ky e kz
	0 kN	0 kN	0 kN
	0 kNm	0 kNm	0 kNm
Nó 3	-2,6 kN	2,3 kN	-6,3 kN
	29,0 kN	28,3 kN	55,2 kN
	13,2 kNm	- 0,2 kNm	108,6 kNm
Nó 4	-	- 5,3 kN	-
	31,0 kN	31,7 Kn	-
	-4,8 kNm	10,6 kNm	-
Nó 5	-0,4 kN	-	3,3 kN
	-	-	4,8 kN
	-	-	1,0 kNm

Fonte: Autora

Tabela 16 – Deformações dos nós das estruturas

Nó	Caso 1 - com kx	Caso 2 - sem base elástica	Caso 3 - com kx, ky e kz
Nó 1	2,079 cm	0,613 cm	21,48 cm
	-0,01035 cm	-0,0101 cm	-0,01973 cm
	-0,00853 rad	-0,0047 rad	-0,1029 rad
Nó 2	2,078 cm	0,6111 cm	21,48 cm
	-0,01384 cm	-0,01418 cm	-45,75 cm
	0,007789 rad	0,003459 rad	-0,1168 rad
Nó 3	0 cm	0 cm	0 cm
	0 cm	0 cm	0 cm
	0 rad	0 rad	0 rad
Nó 4	0 cm	0 cm	-32,91 cm
	0 cm	0 cm	-47,57 cm
	0 rad	0 rad	-0,1044 rad
Nó 5	3,916 cm	-	-
	0 cm	-	-
	0 rad	-	-

Fonte: Autora

No Caso 2, sem a base elástica, nenhum dos apoios está sobrecarregado, pois os dois são considerados indeslocáveis, entre os 3 casos ele é o de modelagem mais estável porém é o caso que não considera a interação solo-estrutura podendo levar à conclusões precipitadas. Quando se observa os valores das deformações, nos elas apoios são nulas, pois são considerados indeslocáveis e as deformações dos nós não vinculados são baixas, não chegando a ser nem 1 cm com um ângulo de rotação muito pequeno também. Ao analisar a

estrutura deformada na figura 44, é possível ver que como ela está impedida de se deslocar nos apoios, ela deforma duas barras sem deslocá-las nos apoios.

No caso 1, com a mola horizontal aplicada no nó 4, a carga horizontal no nó 2 passa a ser praticamente toda reagida pelo apoio do nó 3. Isso se deve ao fato que nesse caso o apoio passa a ser elástico e, como dito, esse valor de coeficiente de 10 kN/m corresponde à uma baixa capacidade de suporte do solo, sendo assim, o apoio do nó 4 não conseguirá reagir à carga e irá se deformar.

Para compreender melhor a situação, basta apenas analisar a equação (16), $q = k_v \cdot w$. Essa equação mostra que quanto menor o coeficiente de mola, maior a deformação e menor será a reação do solo, fato que corresponde à realidade. Um solo mole ou pouco compacto tende a se deformar mais e reagir menos, enquanto um solo duro ou muito compacto tende a reagir mais e deformar menos. No caso 1, as deformações no eixo horizontal aumentam significativamente em relação ao caso 2. No nó 1 o deslocamento horizontal passa de 0,613 cm (caso 2) para 2,079 cm (caso 1), o que corresponde a um aumento de 340%. Já os deslocamentos nas outras direções, eles também modificam, pois a estrutura trabalha em conjunto.

O caso 3 segue a mesma lógica, ele é o caso com as 3 molas aplicadas em cada direção. Sendo assim, o nó 4 não está travado e irá transferir a responsabilidade de reação para o apoio do nó 3. O resultado mostra que as molas não são capazes de reagir às cargas aplicadas, as deformações aumentam de forma muito clara e abrupta devido ao fato da base elástica representando o solo ter baixa capacidade de suporte. No nó 4 ocorre quase 48cm de deslocamento vertical fazendo com que a reação desse solo seja ínfima para a estrutura. A reação do solo sendo muito pequena causa uma alta deformação no pórtico. Ao observar a tabela 15, é possível ver que o nó 3 está sobrecarregado, com momentos de quase 110 kNm devido à redistribuição de esforços causado pelo recalque na base elástica. Quando comparado com os outros casos, fica ainda mais visível a mudança, no caso 1 o momento não chegava a ser nem 14kNm e no caso 2 possuía um valor abaixo de 1kNm.

Como visto, de acordo com o que o projetista modela, as reações e deslocamentos irão mudar, em alguns casos eles não vão se modificar de forma a causar preocupação porém, em outros casos, a distribuição de esforços, como anteriormente citado e agora mostrado com um exemplo, irá ser completamente modificada.

6.3.4.2. Esforços e deslocamentos das barras

Além dos esforços e deslocamentos da estrutura, também foram analisados os esforços internos da barra bem como os seus deslocamentos. A barra 4 aqui não será citada pois ela foi criada apenas para facilitar o processo de cálculo.

Tabela 17 – Caso 1: com K_x

Extremidades	Barra (1)		Barra (2)		Barra (3)	
	Esforços	Deformações	Esforços	Deformações	Esforços	Deformações
I	29,0 kN	0,000000 cm	0,4 kN	2,079000 cm	31,0 kN	3,916000 cm
	2,6 kN	0,000000 cm	29,0 kN	-0,028790 cm	0,4 kN	0,000000 cm
	13,2 kNm	0,000000 rad	2,7 kNm	-0,008544 rad	6,8 kNm	0,000000 rad
II	- 29,0 kN	2,058000 cm	- 0,4 kN	2,078000 cm	-31,0 kN	2,096000 cm
	- 2,6 kN	-0,010290 cm	31,0 kN	-0,029550 cm	-0,4 kN	-0,013780 cm
	- 2,7 kNm	-0,008511 rad	- 6,8 kNm	0,007824 rad	-4,8 kNm	0,007747 rad

Fonte: Autora

Tabela 18 – Caso 2: sem base elástica

Extremidades	Barra (1)		Barra (2)		Barra (3)	
	Esforços	Deformações	Esforços	Deformações	Esforços	Deformações
I	28,3 kN	0,000000 cm	5,3 kN	0,613000 cm	31,7 kN	0,000000 cm
	- 2,3 kNm	0,000000 cm	28,3 kN	-0,015800 cm	5,3 kN	0,000000 cm
	- 0,2 kNm	0,000000 rad	9,0 kNm	-0,004729 rad	15,8 kNm	0,000000 rad
II	- 28,3 kN	0,612600 cm	- 5,3 kN	0,611100 cm	- 31,7 kN	0,619700 cm
	2,3 kNm	-0,010080 cm	31,7 kN	-0,022700 cm	- 5,3 kN	-0,014090 cm
	- 9,0 kNm	-0,004698 rad	- 15,8 kNm	0,003559 rad	10,6 kNm	0,003353 rad

Fonte: Autora

Tabela 19 – Caso 3: com K_x , K_y , K_z

Extremidades	Barra (1)		Barra (2)		Barra (3)	
	Esforços	Deformações	Esforços	Deformações	Esforços	Deformações
I	55,2 kN	0,000000 cm	- 3,3 kN	24,800000 cm	4,8 kN	-32,900000 cm
	6,3 kN	0,000000 cm	55,2 kN	-0,219700 cm	- 3,3 kN	-47,570000 cm
	108,6 kNm	0,000000 rad	83,5 kNm	-0,103300 rad	- 17,5 kNm	-0,104400 rad
II	- 55,2 kN	21,220000 cm	3,3 kN	21,480000 cm	- 4,8 kN	21,210000 cm
	- 6,3 kN	-0,019600 cm	4,8 kN	-47,380000 cm	3,3 kN	-47,570000 cm
	- 83,5 kNm	-0,102300 rad	17,5 kNm	-0,116900 rad	1,0 kNm	-0,116700 rad

Fonte: Autora

Para os esforços internos, a mesma ideia do tópico anterior acontece. Analisando o caso 1, todos os valores relacionados à coordenada x, no SGR, aumentam de forma clara, em

relação ao caso 2, quando se aplica a mola horizontal. Observando a extremidade I da barra (3), que está localizada no apoio, percebe-se que para o caso 2 como o apoio é indeslocável, a deformação é zero, já para o caso 1 que possui uma mola horizontal, o valor passa a ser de quase 4 cm, no caso 3 com as três molas a situação ainda piora, a deformação horizontal chega a quase 33 cm.

No caso 2 as deformações são baixas devido ao fato de que a estrutura está biengastada. Como ela está travada em seus apoios, as deformações serão menores em toda a estrutura, sendo nula nos apoios.

O caso 3 é claro no resultado, as molas não atuam, independentemente, cada uma em sua direção, a aplicação da mola nas três direções, potencializa o recalque para esse solo de baixa capacidade de suporte. Para a extremidade I da barra (3) é possível ver como o cortante da barra tem um valor baixo, isso se deve à aplicação da mola, como ela está se deformando muito, quer dizer que o solo não está reagindo muito.

Outros valores que chamam atenção são os da barra 1 nas duas extremidades no caso 3. Seguindo a mesma lógica do item 6.3.4.1., o apoio localizado na extremidade I da barra (1) está sobrecarregado e isto reflete em toda sua vizinhança. Como a extremidade mais próxima, é a extremidade II ainda da mesma barra e a extremidade I da barra (2), que correspondem ao nó 1 da estrutura, são elas também as mais afetadas pela base elástica aplicada nas três direções no nó 4.

Por fim, ainda no caso 3, a estrutura recebe a aplicação de três molas no modelo, sendo assim, é permitida a deformação nesses apoios. Como as molas representam um solo fraco, a deformação aumenta muito refletindo em toda a estrutura. As grandes deformações, quase 48 cm, na barra (3) devido às molas gera um impacto em todo o pórtico ocasionando grandes deformações também nas outras barras.

7. ANÁLISE DE UMA VIGA CONSIDERANDO APOIO ELÁSTICO

Outra estrutura a ser analisada será uma viga biengastada de concreto armado com um comprimento de 8 m. Essa modelagem representa uma viga baldrame apoiada no solo, meio considerado elástico. A mola vertical então representará o solo, sendo assim, é uma estrutura que está recebendo a análise da interação solo-estrutura.

Serão comparados quatro casos. Primeiramente, a estrutura será analisada desconsiderando o efeito da interação solo-estrutura, não serão aplicadas molas verticais para representar o meio elástico. Em seguida, apenas uma mola será aplicada na parte central da estrutura. Para finalizar, molas espaçadas entre si em 1m e 0,50 m serão aplicadas para melhor representação do solo. Os resultados então serão comparados.

Para todos os casos a viga tem uma seção retangular de 30 cm de base e 40 cm de altura. Sendo assim,

$$A = 0,12 \text{ m}^2$$

$$I = 0,0016 \text{ m}^4$$

A viga possui um carregamento uniformemente distribuído ao longo do seu comprimento de 5,0 kN/m. Esses valores de carga não têm o objetivo de representar um caso real, eles estão sendo aplicados apenas para um comparativo. Não há carregamentos pontuais nem carregamento ao longo do eixo horizontal. Foi considerado um módulo de elasticidade de 28 GPa.

$$\text{Peso próprio} = 25 \text{ kN/m}^3 * 0,4 * 0,3 = 3 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga vertical adicional} = 2 \text{ kN/m}$$

$$\text{Carga total} = 5 \text{ kN/m}$$

A viga está assentada à 2,00 no nível do terreno. Na sondagem no Anexo B, observa-se que para essa cota, o NSPT é de 2. Esse valor representa um solo de baixa capacidade portante.

Para os casos em que a viga será apoiada em base elástica ao longo do seu comprimento, a equação abaixo, será utilizada para se encontrar o valor do coeficiente de mola.

$$k_{m,v} = k_v * B * e \quad (58)$$

Onde $k_{m,v}$ é o coeficiente de mola em kN/m, k_v é o coeficiente de mola achado da tabela 1, por exemplo, em kgf/cm³, B é a largura do elemento estrutural em cm e e , o espaçamento em cm.

7.1.Caso 1: sem molas

Para o caso 1, a viga é biengastada e não está sendo considerada apoiada em base elástica ao longo do seu comprimento, ver figura 48.

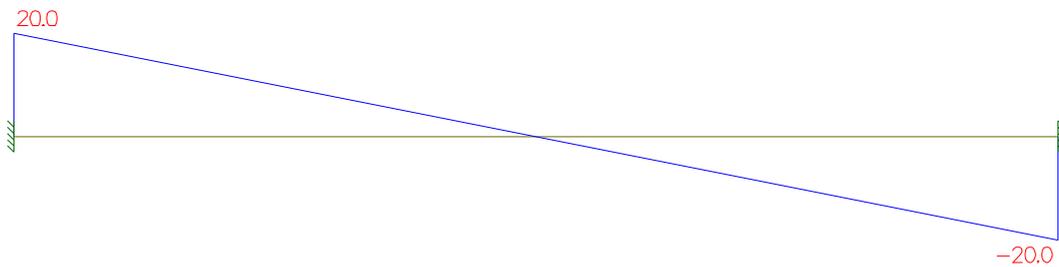
Figura 48 – Viga biengastada sem base elástica no seu comprimento longitudinal



Fonte: Autora

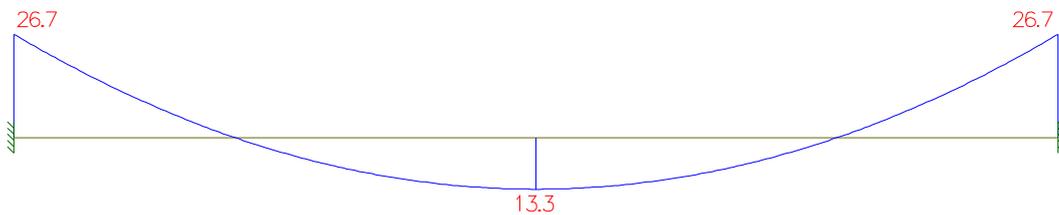
As figuras 49, 50 e 51 mostram os resultados obtidos para a configuração apresentada na figura 48.

Figura 49 – DEC em kN da viga (Caso 1)



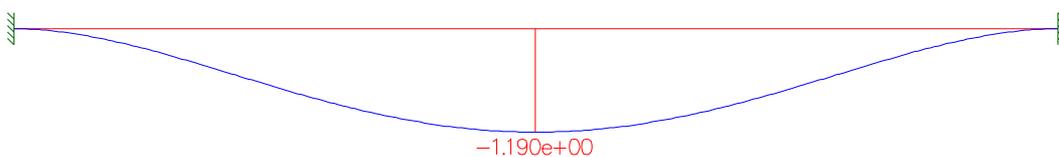
Fonte: Autora

Figura 50 – DMF em kNm da viga (Caso 1)



Fonte: Autora

Figura 51 – Deformação em mm da viga (Caso 1)



Fonte: Autora

7.2.Caso 2: com uma mola vertical centralizada

Para este caso, a viga é biengastada e está apoiada em uma base elástica ao longo do seu comprimento. A base elástica é representada com uma mola centralizada, ver figura 52.

O coeficiente de mola para as molas centrais foi achado da seguinte forma:

Primeiramente, para um NSPT de 2 e substituindo na equação (19) tem-se:

$$\sigma = \frac{NSPT}{5} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ kgf/cm}^2$$

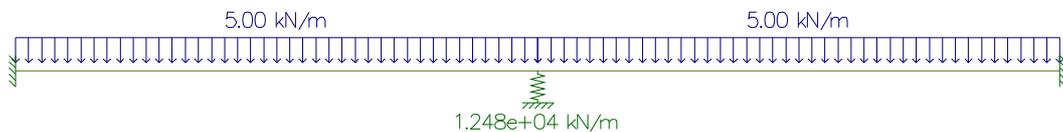
Da tabela 1 o valor correspondente foi considerado como sendo:

$$k_v = 1,04 \text{ kgf/cm}^3$$

Como, a largura da viga é de 30 cm, o espaçamento de 4 m e substituindo na equação (58), tem-se:

$$k_{m,v} = 1,04 * 30 * 400 = 12480 \text{ kgf/cm} = 12480 \text{ kN/m}$$

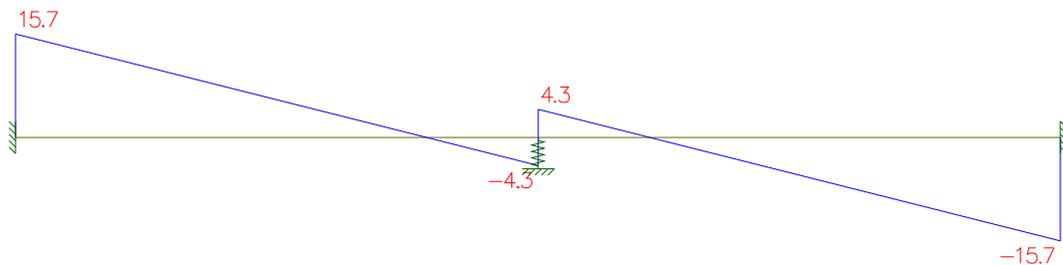
Figura 52 – Viga biengastada com uma mola vertical centralizada



Fonte: Autora

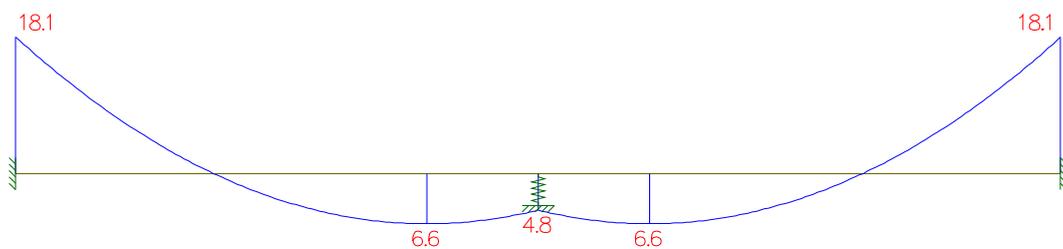
As figuras 53, 54 e 55 mostram os resultados obtidos para a configuração apresentada na figura 52.

Figura 53 – DEC em kN da viga (Caso 2)



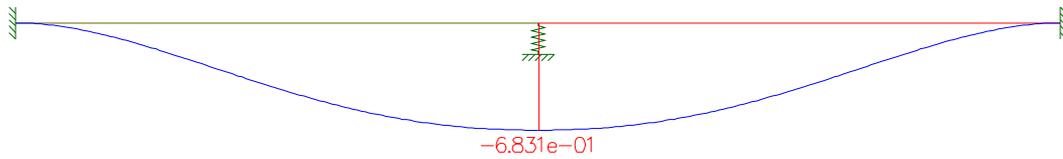
Fonte: Autora

Figura 54 – DMF em kNm da viga (Caso 2)



Fonte: Autora

Figura 55 – Deformação em mm da viga (Caso 2)



Fonte: Autora

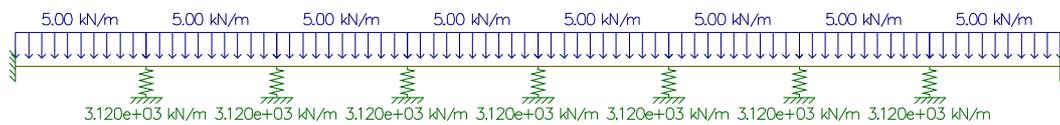
7.3.Caso 3: com várias molas verticais espaçadas em 1 m

Para este caso, a viga é biengastada e está apoiada em uma base elástica ao longo do seu comprimento. A base elástica é representada com molas espaçadas em 1 m, ver figura 56.

Considerando o mesmo NSPT do Caso 2, largura da viga de 30 cm, o espaçamento de 100 cm e substituindo na equação (58), tem-se:

$$k_{m,v} = 1,04 * 30 * 100 = 3120 \text{ kgf/cm} = 3120 \text{ kN/m}$$

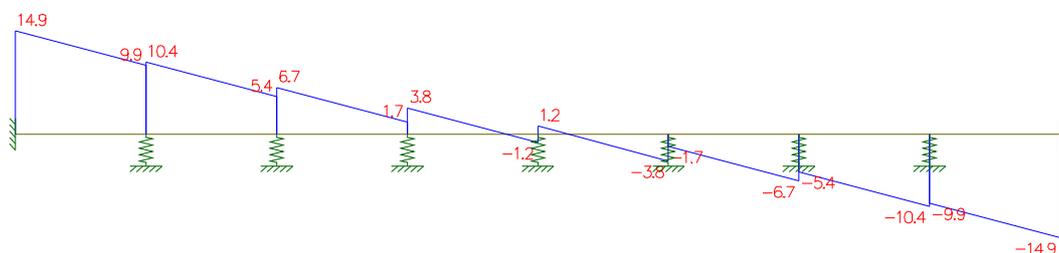
Figura 56 – Viga biengastada com molas verticais espaçadas em 1 m



Fonte: Autora

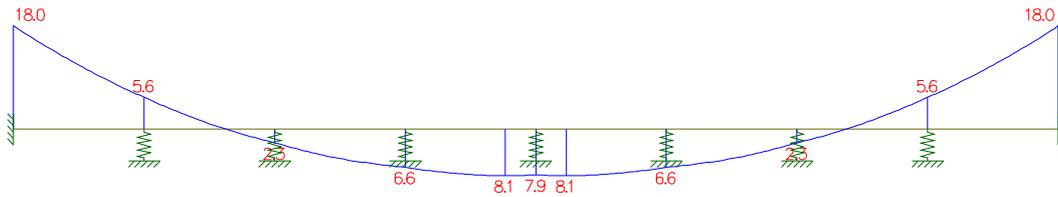
As figuras 57, 58 e 59 mostram os resultados obtidos para a configuração apresentada na figura 56.

Figura 57 – DEC em kN da viga (Caso 3)



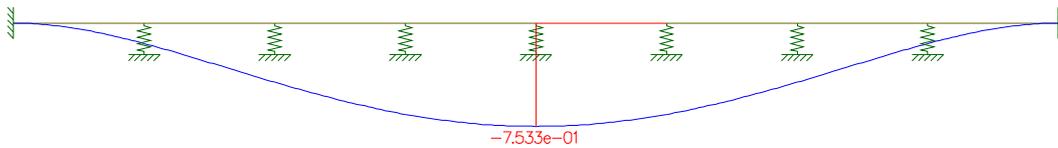
Fonte: Autora

Figura 58 – DMF em kNm da viga (Caso 3)



Fonte: Autora

Figura 59 – Deformação em mm da viga (Caso 3)



Fonte: Autora

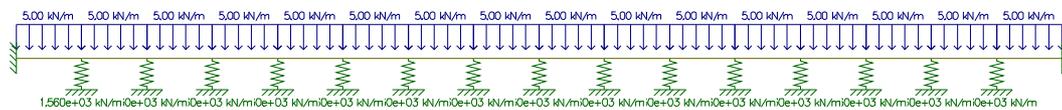
7.4.Caso 4: com várias molas verticais espaçadas em 0,50 m

Para este caso, a viga é biengastada e está apoiada em uma base elástica ao longo do seu comprimento. A base elástica é representada com molas espaçadas com 1 m, ver figura 60.

Considerando o mesmo NSPT do Caso 2, largura da viga de 30 cm, o espaçamento de 50 cm e substituindo na equação (58), tem-se:

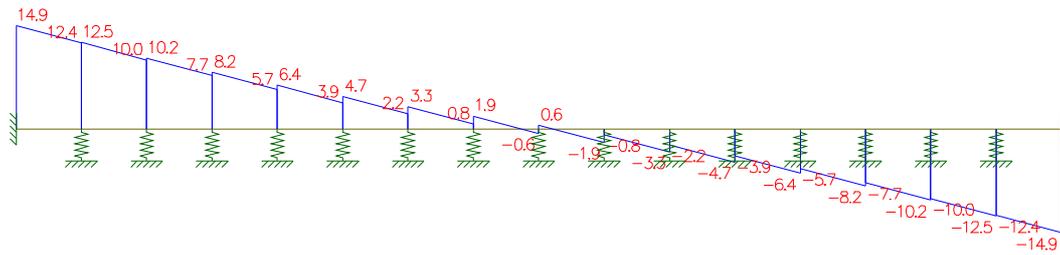
$$k_{m,v} = 1,04 * 30 * 50 = 1560kgf/cm = 1560kN/m$$

Figura 60 – Viga biengastada com molas verticais espaçadas em 0,50 m

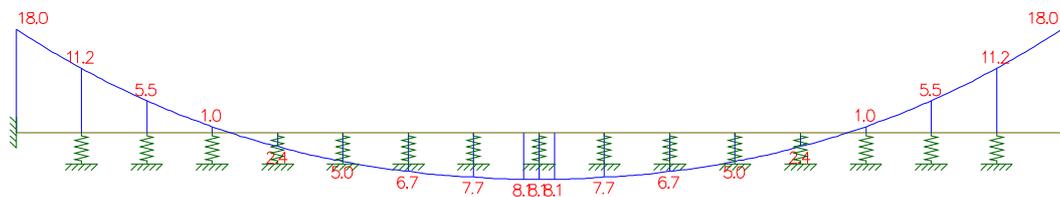


Fonte: Autora

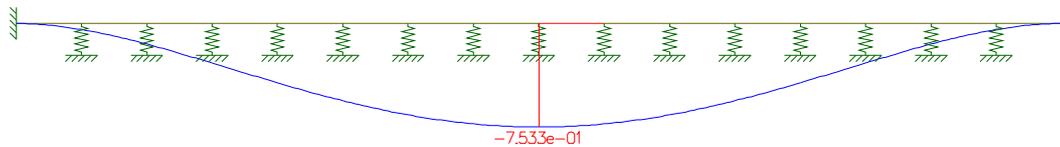
As figuras 61, 62 e 63 mostram os resultados obtidos para a configuração apresentada na figura 60.

Figura 61 – DEC em kN da viga (Caso 4)

Fonte: Autora

Figura 62 – DMF em kNm da viga (Caso 4)

Fonte: Autora

Figura 63 – Deformação em mm da viga (Caso 4)

Fonte: Autora

7.5. Análise de resultados

Os esforços e deformações obtidos nos quatro casos de estudo viga estão resumidos na tabela 20.

Tabela 20 – Comparativo das reações e deformações

Caso	Reações verticais nos apoios	Momento no ponto central	Momentos nos apoios	Deformação máxima*
1º caso	20 kN	13,3 kNm	-26,7 kNm	-1,19 mm
2º caso	15,7 kN	4,8 kNm	-18,1 kNm	-0,6831 mm
3º caso	14,9 kN	7,9 kNm	-18,0 kNm	-0,7533 mm
4º caso	14,9 kN	8,1 kNm	-18,0 kNm	-0,7533 mm

*Estão localizadas no ponto central da viga.

Fonte: Autora

A viga estudada foi uma estrutura hipotética modelada para mostrar a diferença quando se faz uma análise com e sem interação solo-estrutura. Ela possui as mesmas características apenas mudando a consideração ou não de apoios elásticos ao longo do seu comprimento. Do ponto de vista estrutural, as deformações obtidas em todos os casos são aceitáveis, pois são da ordem de 1 mm apenas, porém o foco da análise não é este, é o de analisar a mudança de valores quando se compara o 1º caso, sem interação, com os demais.

Primeiramente, é importante compreender o que está acontecendo na estrutura ao se aplicar as molas ao longo do seu eixo. O caso 2, 3 e 4 possuem molas verticais que representam uma base elástica e o caso 1, não. No caso 1, toda a responsabilidade de reagir aos esforços da estrutura são os apoios, considerados engastados. Já nos três últimos casos, parte dessa responsabilidade também é da base elástica. Como está sendo considerado que ao longo do comprimento da viga há um meio que irá reagir aos esforços que chegam nele, os apoios engastados receberão um alívio porque parte das cargas serão absorvidas pela base elástica. Em outras palavras, os casos 2, 3 e 4 consideram que o solo também sustenta a viga ao longo do seu comprimento. Os dois últimos casos foram feitos para analisar o quanto o refinamento da interação influenciaria. Pode-se ver que, para este caso, o refinamento parou de surgir efeito a partir das molas espaçadas em 0,50m, pois os resultados convergem com os resultados do caso anterior.

O refinamento do caso 2 com apenas um mola centralizada em um vão de 8 metros se mostrou insuficiente, apesar dela representar o esperado que foi a diminuição de recalques e alívio nas reações de apoio, quando se aplicam mais molas, como nos casos 3 e 4, os valores convergem entre si, indicando uma modelagem adequada. Do caso 3 para o caso 4 mesmo com o refinamento, quase não há mudança de valores.

Comparando o 1º caso sem interação com o caso mais refinado de molas percebe-se a redução de quase 0,45 mm de deformação, o que corresponde a uma diminuição de quase 37% do recalque absoluto.

A mesma ideia acontece nas reações de apoio, do primeiro para o quarto caso há uma redução de 5,1 kN, ou quase 26%. Como parte da carga vertical, é absorvida pelo solo, os momentos também diminuem de 13,3 kNm (caso 1) para 8,1 kNm (caso 4) no ponto central. Os momentos no apoio também são reduzidos de 26,7 kNm para 18,0 kNm.

Não considerar a interação solo-estrutura com essas molas em uma viga baldrame, por exemplo, significa dizer que ela não está apoiada em nada ao longo do seu comprimento, é dizer que ela não está apoiada no solo. Seria o mesmo de dizer que a viga baldrame se

comporta igual à uma viga engastada em pilares. Considerar essa interação, nesse caso, é de extrema importância, pois você representa a base elástica, o solo, que é onde a viga baldrame também se apoia e dissipa suas cargas.

8. CONCLUSÃO

Através da análise das estruturas analisadas foi possível observar a mudança que os esforços de uma estrutura sofrem quando a interação solo-estrutura é aplicada. Para o pórtico calculado por análise matricial, foi possível ver como uma base elástica representando um solo de baixa capacidade portante e aplicada a um dos apoios pode afetar o resto da estrutura. Como que os recalques podem acarretar na redistribuição de esforços.

Já no estudo da viga biengastada, a ideia da análise foi diferente. Os apoios não foram alterados, a viga continuou biengastada, porém recebeu o auxílio de molas ao longo de seu comprimento ocasionando uma redistribuição de esforços que reduziu as reações nos apoios. Mesmo para o solo considerado, com um NSPT 2, de baixa capacidade portante, ele ainda consegue absorver parte das cargas ao longo do comprimento da viga, aliviando assim as reações de apoio.

Para a viga analisada, do caso 3 para o caso 4, o refinamento na modelagem do problema não alterou os resultados, indicando que o caso 3 já satisfazia a análise. O projetista irá analisar até onde é necessário refinar essa modelagem e o que os resultados ali calculados significam.

Além disso, a necessidade de aplicar a interação solo-estrutura se deve ao fato que ela tenta representar melhor a estrutura como um todo. O trabalho serve para alertar e desenvolver a ideia sobre a diferença de uma estrutura modelada com e sem interação solo-estrutura.

O modelo de Winkler, o utilizado para as análises deste trabalho, é um modelo simples de fácil entendimento e muito utilizado pelos projetistas. É um método mais simplificado que os métodos discretos de aproximação, por exemplo. É esperado que com o passar do tempo, sejam desenvolvidos mais estudos e programas aplicando o método de elementos de contorno, um método muito adequado para estudo de meios contínuos, semi-infinitos ou infinitos, como o solo.

9. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2014.

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 6122 – Projeto e Execução de Fundações**. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 6489 – Solo – Prova de carga estática em fundação direta**. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR 8681 – Ações e segurança nas estruturas - Procedimento**. Rio de Janeiro: ABNT, 2019.

ALONSO, U.R. (1943). **Exercícios de Fundações**, São Paulo: Edgard Bluche.

ANTONIAZZI, J.P. (2011). **Interação Solo-Estrutura de Edifícios com Fundações Superficiais**. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Maria – UFSM, Santa Maria.

AltoQi. **Como determinar o coeficiente de reação vertical?**. Disponível em <<https://suporte.altoqi.com.br/hc/pt-br/articles/115004184613-Como-determinar-o-coeficiente-de-recalque-vertical->>. Acesso em 07 de junho de 2021.

ARAÚJO, A.G.D. (2013). **Provas de carga estática com carregamento lateral em estacas hélice contínua e cravadas metálicas em areia**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Natal, RN.

BARATA, F.E. (1986). **Recalques de edifícios sobre fundações diretas em terrenos de compressibilidade rápida e com a consideração da rigidez da estrutura**. Tese de concurso para Professor Titular do Departamento de Construção Civil, Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

BARBIRATO, J.C.C. (1999). **Método dos elementos de contorno com a reciprocidade dual para a análise transiente tridimensional da mecânica do faturamento**. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlo, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP.

BASTOS, P.S.S. (2019). **SAPATAS DE FUNDAÇÃO**. Universidade Estadual Paulista. Bauru, SP.

BAZZAN, H.W.D. (2015). **Um modelo de Estaca para Análise de Vibrações**. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio, Rio de Janeiro.

BRAGA, L.M. (2012). **O Método dos Elementos de Contorno Rápido com Expansão em Multipólos Aplicado a Problemas de condução de Calor**. Dissertação de Mestrado. Universidade de Brasília, Brasília.

BRAJA, M.D. (2007). **Fundamentos de Engenharia Geotécnica**. Trad. Da 6. Ed. Americana. São Paulo.

BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.E. WROBEL, L.C. (1983). **Boundary Element Techniques Theory and Applications in Engineering**. Springer-Verlag:Berlim-Heidelberg, New York, Tokio.

CABRAL, F.E.S. (2016). **Análise da Estabilidade e da interação solo-estrutura aplicada a estacas de um píer**. Projeto de Graduação. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CAMARGO, F.E. (2002). **Estados limites de fundações considerando a resposta da superestrutura**. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul - UFRGS, Porto Alegre.

CHAMECKI, S. (1969). **Calcul des tassements progressifs des foundations en tenant compte de l'interaction des structures et du sol**. In : Annales de l'ITBTP, n°. 261; apud Iwamoto, R.K. (2000).

CINTRA, J.C.A.; AOKI, N.; ALBIERO, J.H (2011). **Fundações diretas: projeto geotécnico**. São Paulo: Oficina de Textos.

CRESPO, V.A.S. (2004). **ESTUDO DA SENSIBILIDADE DE EDIFICAÇÕES EM RELAÇÃO AO SOLO**. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia Civil, Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro - UENF, Campos dos Goytacazes.

CRUZ, J.M.F. (2012). **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo método dos elementos de contorno**. Tese de doutorado. Universidade Federal da Paraíba. João Pessoa.

CRUZ, J.M.F. (2021, no prelo). **ANÁLISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS – Método dos Deslocamentos (Estruturas Reticuladas Planas)**. João Pessoa - PB

DÓRIA, L.E.S. (2007). **PROJETO DE ESTRUTURA DE FUNDAÇÃO EM CONCRETO DO TIPO RADIER**. Dissertação de mestrado. Universidade Federal de Alagoas. Maceió.

FIGUEIREDO, L.C.; RIBEIRO, I.; PIRES, R.R.; MARCHEZINI, S.F. (2017). **Determinação do Coeficiente de Reação Vertical (Kv) e Horizontal (Kh) de um Solo Tropical em Cuiabá**. GEOCENTRO. Goiânia, GO.

FONTE, A. O. C.; JUCÁ, J. F. T.; PONTES FILHO, J. D. S (1994). **Interação solo-estrutura em edifícios altos**. In: X CONGRESSO BRASILEIRO DE GEOLOGIA DE ENGENHARIA - COBRAMSEF / 1º SBMR. Foz do Iguaçu.

FREDHOLM, M.I (1903). **Sur une classe d'equations fonctionelles**. Acta Math., v. 27, p. 365-390.

GOSHY, B. (1978). **Soil-foundation-structure interaction**. Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 104, nº ST5, pp. 749-761.

GUSMÃO, A.D. (1990). **Estudo da Interação Solo-Estrutura e sua Influência em Recalques de Edificações**. Rio de Janeiro, 165 p. Dissertação (Mestrado) – COPPE/UFRJ.

GUSMÃO, A.D.; GUSMÃO F.; J.A. (1994). **Avaliação da influência da interação solo-estrutura**. In: X COBRAMSEF, Foz de Iguaçu, PR, ABMS. Anais, Vol.1, p.68-74; apud Iwamoto, R.K. (2000).

GUSMÃO F.; JAIME A. (2002). **FUNDAÇÕES: Do conhecimento geológico à prática da engenharia**. Pernambuco: Editora universitária UFPE.

HOLANDA JÚNIOR, O.G. (1998). **Interação solo – estrutura para edifícios de concreto armado sobre fundações diretas**. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos.

IWAMOTO, R.K. (2000). **Alguns aspectos dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda**. Dissertação (Mestrado) – Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos – USP, São Carlos.

JORDÃO, D.R. (2003). **Estabilidade global de edifícios sobre fundações profundas considerando a interação estrutura-solo**. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos - USP, São Carlos.

LOPES, F.R; GUSMÃO, A.D (1991). *On the influence of soil-structure interaction in the distribution of foundation loads and settlements*. In: EUROPEAN CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND FOUNDATION ENGINEERING, 10, Firenze, 1991. Proceedings. Rotterdam, A. A. Balkema, 1991, v. 2, p.505-509.

MARANGON, M. (2018). **Resistência ao cisalhamento dos solos**. Cap.5. Faculdade de Engenharia NuGeo.

MENDES, E.J.M. (2016). **Análise de edifícios considerando a interação solo-estrutura**. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

MEYERHOF, G.G. (1953). *Some recente foundation research and its application to design*. Structural Engineering, v. 31, pp. 151-167, Londres.

MINDLIN, R.D. (1936). *Force at a point in the interior of a semi-infinite solid*. Physics, v. 7, pp. 195-202.

MILANI, A.S. (2012). **Análise de torres metálicas treliçadas de linha de transmissão considerando a interação solo-estrutura**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Santa Maria, RS.

MORRISON, N. (1993). *Interacción suelo-estructuras: semiespaço de winkler*. Barcelona: Universidad Politécnica de Cataluña.

MOTA, M.M.C. (2009). **Interação solo-estrutura em edifícios com fundação profunda: método numérico e resultados observados no campo**. Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

ORTIGÃO, A. **Interação solo-estrutura**. Geotecnia Brasil. Publicado em 17 de janeiro de 2020. Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=a6nkUUfo2Po>>. Acesso em 23 de maio de 2021.

PERLOFF, W.H. (1975). *Pressure distribution and settlement*. In: WINTERKORN, H.F.; FANG, H.Y. Foundation engineering handbook. New York: Van Nostrand Reinhold, p. 148-196; apud Souza e Reis (2008).

PORTO, T.B. (2010). **Estudo da interação de paredes de alvenaria estrutural com a parede de fundação**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

POULOS, H.G., DAVIS, H.G. (1968). *The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers*. Geotechnique, v. 18, pp. 351-371.

POULOS, H.G. (1971). *Behaviour of laterally loaded piles II-Piles groups*. Journal of soil mechanics and foundations division, SCE, V. 97, n.SM5, pp. 733-751.

POULOS, H. G. (1975). *Settlement Analysis of Structural Foundation Systems*. Proceedings, 4th. South-East Asian Conf. On Soil Engineering, Kuala Lumpur, Vol. 4, pp. 52-62.

PROENÇA, S.P.B. (1986). **Noções Básicas de Reologia**. Publicação 045/86 – EESC/USP.

RAUSCH, E. (1959). **Machine foundation and other dynamically loaded structures**. Berlin: Varlag.

REIS, J. H. C. (2000). **Interação solo-estrutura de grupo de edifícios com fundações superficiais em argila mole**. 155 f. Dissertação (Mestrado em Geotecnia) – Universidade de São Paulo, São Carlos.

SHUKLA, S.N. A Simplified Method for Design of Mats on Elastic Foundations”. ACI Structural Journal, 1984, p.469-475.

SOUZA, R.; REIS, J.H.C. (2008). **Interação solo-estrutura para edifícios sobre fundações rasas**. Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá.

TEIXEIRA, A.H.; GODOY, N.S. (1996). **Análise projeto e execução de fundações rasas**. In: Hachich, W. et al., ed. Fundações, teoria e prática. São Paulo, PINI. Cap 7, pp. 227-264.

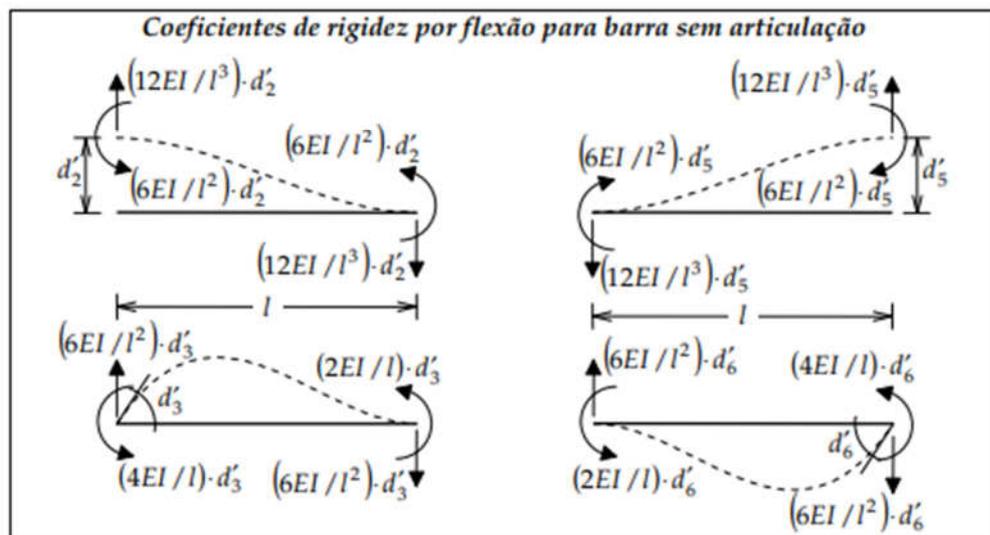
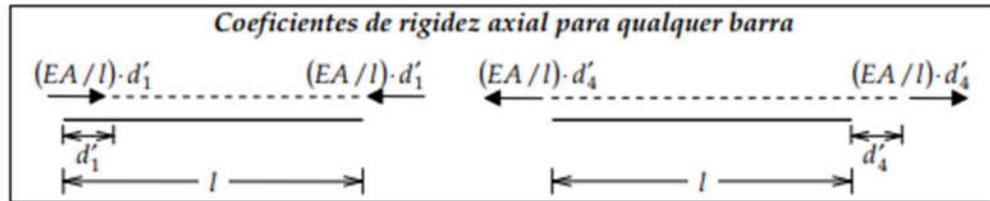
TERZAGHI, K. (1955). **Evaluation of Coefficients of Subgrade Reaction, Geotechnique**, Cambridge: Institution of civil engineers, vol.5.

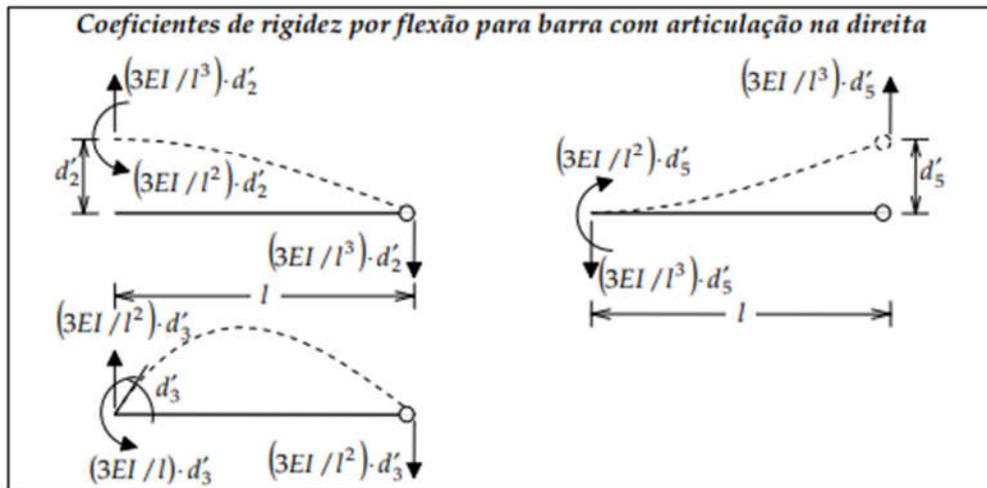
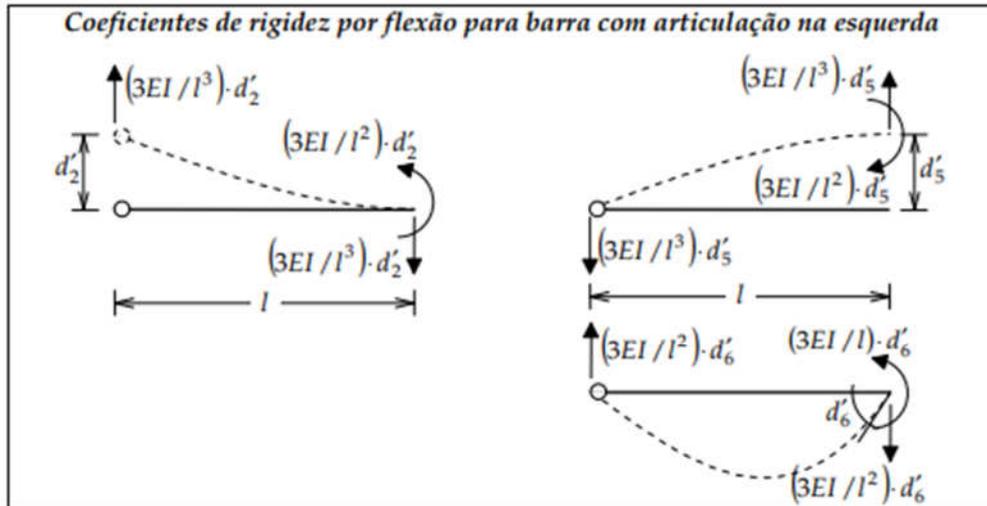
TQS. **Interação Solo-Estrutura.** Disponível em <http://docs.tqs.com.br/Docs/Details?id=3905&language=pt-Br>>. Acesso em 04 de maio de 2021.

VELLOSO, D.A.; LOPES, F.R. (2010). **Fundações: critérios de projeto, investigação do subsolo, fundações superficiais, fundações profundas.** São Paulo: Oficina de Textos.

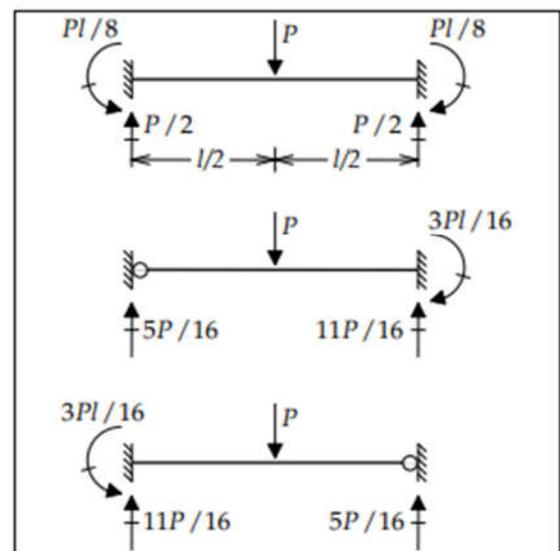
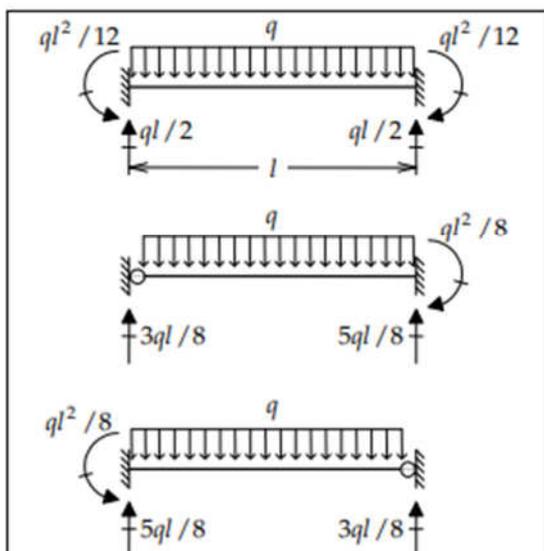
VIEIRA, C.S. (2009). **Aplicação do acoplamento entre o método dos elementos de contorno e o método dos elementos finitos para a análise bidimensional da interação solo-estrutura.** Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Alagoas, Maceió.

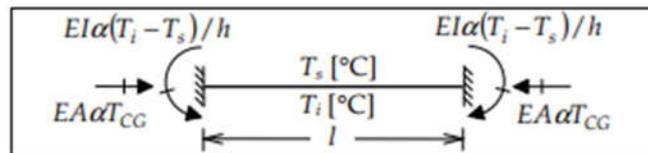
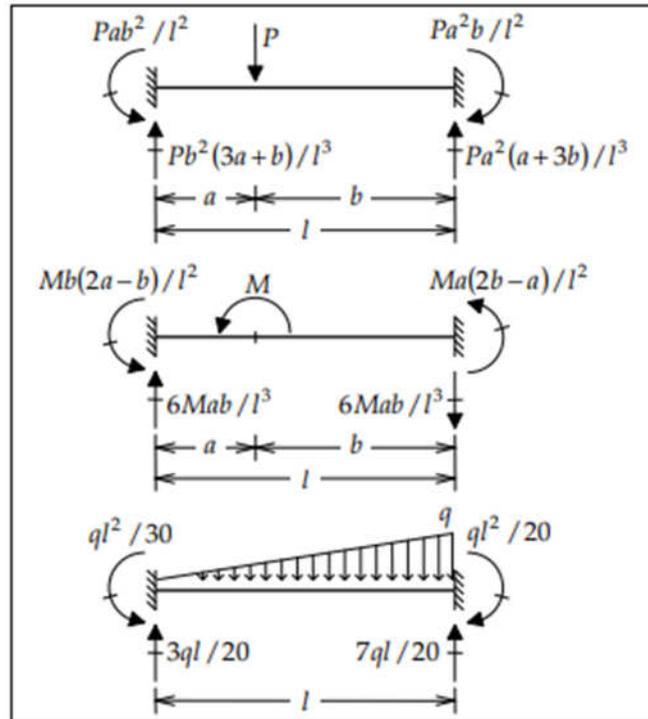
Anexo A

Coefficientes de rigidez locais (de barra) no sistema de eixos locais



Reações de engastamento de barras isoladas





Anexo B

 FUNDAÇÕES E GEOLOGIA LTDA FUNDAÇÕES E GEOLOGIA		FUNDAÇÕES E GEOLOGIA LTDA fungeo@fungeo.com.br (45) 3324-6102		Cliente: B4 CONSTRUÇÕES CIVIS LTDA. Obra: EDIFÍCIO RESIDENCIAL Local: CASCAVEL - PR							
Revestimento	Processo de Perfuração	N.A. Final	Nº de golpes/ penetração		Índice SPT finais/30cm	Amostras	Prof. Camadas (m)	Relatório de Sondagem		Nº 011515	
1.0	T.H.		0	0	0	0	0	Cota relação R.N. Furo SPT 01 Cota Inicial 99,900 Cota Final 79,450		_____ 30 cm finais - - - - - 30 cm iniciais	
	Perf. C.A.	13,48	SPT - Standard Penetration Test		Camadas - Classificação dos solos						
			1	1	1	2	1	ARGILA, COR MARROM AVERMELHADA, EVENTUAIS GRÂNULOS DE QUARTZO, CONSISTÊNCIA MUITO MOLE A MÉDIA.			
			1	1	1	2	2				
			1	2	2	4	3				
			2	2	2	4	4				
			2	3	3	6	5				
			2	3	3	6	6	6,45		6,45	
			2	3	3	6	7	7,45			
			3	3	4	7	8				
			4	5	5	10	9		ARGILA, TONALIDADE MARROM AVERMELHADA, ALTERAÇÕES AMARELADAS E PONTUAIS ESBRANQUIÇADAS, OCORRÊNCIA DE GRÂNULOS DE QUARTZO, INTERCALAÇÃO CDM A CAMADA DE TONALIDADE ROXA, CONSISTÊNCIA MÉDIA.		
			4	5	6	11	10				
			5	6	7	13	11				
			6	7	8	15	12				
			9	11	12	23	13				
			11	12	14	26	14				
			15	18	19	37	15		ARGILA A ARGILA SILTOSA, TONALIDADE ROXA, ALTERAÇÕES AMARELADAS E PONTUAIS ESBRANQUIÇADAS, PERCOLAÇÕES COM CORES MESCLADAS OCASIONALMENTE EM FORMA DE FEDDES, CONSISTÊNCIA MÉDIA A DURA.		
			15	16	18	34	16				
			14	14	15	29	17				
			14	16	17	33	18				
			15	18	18	36	19				
			17	17	19	36	20	20,45		20,45	
							21				
							22				
							23				
							24				
							25				
							26				
							27				
							28				
							29				
							30				
							31				
							32				
							33				
							34				
							35				
							36				
							37				
Trado Helicoidal (T.H.) Circulação d'água (C.A.) N.A. Inicial: 14,70m. N.A. Final: 13,48m.			Amostrador Revestimento Ø 2 1/2" Ø Interno 1 3/8" Peso 65,0 kg Ø Externo 2" Altura de queda 75,0 cm			Data de execução Início: 20/01/2015 Término: 20/01/2015					
Digitador: Helton E. Machado			Geólogo: Gerson A. Lorenzi - CREA-PR 21.205-D								