



**UNIVERSIDADE FEDERALE DA PARAIBA**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL E AMBIENTAL**

**WELLIGTON FELIPE BEZERRA GOMES**

**ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS EM BASE ELÁSTICA**

**JOÃO PESSOA - PB**

**2020**

**WELLIGTON FELIPE BEZERRA GOMES**

**ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS EM BASE ELÁSTICA**

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de graduação de engenharia civil da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em engenharia civil.

Orientador: José Marcilio Filgueira Cruz

**JOÃO PESSOA – PB**

**2020**

**Catálogo na publicação**  
**Seção de Catalogação e Classificação**

G633a Gomes, Welligton Felipe Bezerra.  
Análise de pórticos planos em base elástica / Welligton  
Felipe Bezerra Gomes. - João Pessoa, 2020.  
54 f.

Orientação: José Marcílio Filgueiras Cruz.  
TCC (Graduação) - UFPB/CT.

1. Iteração; Solo; Estrutura; Matricial: Fundações. I.  
Cruz, José Marcílio Filgueiras. II. Título.

UFPB/BS/CT

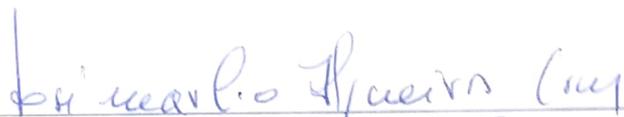
CDU 621(043.2)

## FOLHA DE APROVAÇÃO

**WELLIGTON FELIPE BEZERRA GOMES**

### **ANÁLISE DE PÓRTICOS PLANOS EM BASE ELÁSTICA**

Trabalho de Conclusão de Curso em 27/11/2020 perante a seguinte Comissão Julgadora:



Prof. José Marcílio Filgueira Cruz, Doutor  
Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do CT/UEPB

APROVADO



Prof. Enildo Tales Ferreira, Doutor  
Universidade Federal da Paraíba

APROVADO



Prof. Carlos Antônio Taurino, Doutor  
Universidade Federal da Paraíba

APROVADO



Prof.<sup>a</sup> Andrea Brasiliano Silva  
Matrícula Siape: 1549557  
Coordenadora do Curso de Graduação em Engenharia Civil

*Dedico esse trabalho a meus pais por todo o esforço e formação que me deram até aqui, e a todos os meus colegas que contribuíram para meu crescimento e aprendizagem.*

“Calcular fundações sem iteração solo-estrutura é viver em uma grande mentira por pelo menos 50 anos.”

Corsini, Ricardo.

## RESUMO

O projeto geotécnico geralmente não leva em conta as alterações das tensões geradas devido às deformações no solo, assim como o projeto de superestrutura normalmente não leva em conta a redistribuição dos esforços gerados por esses deslocamentos. A consideração separada dos estudos estruturais e geotécnicos advém do alto grau de complexidade envolvido em se avaliar esses fenômenos. Os projetos de engenharia sem a consideração de apoios elásticos podem levar a uma interpretação errada do dimensionamento da estrutura. Vários casos de prédios em Santos/SP nos quais ocorrem fissuras e outras patologias se constituem em exemplos diretos da necessidade de analisar em conjunto as estruturas e o maciço na qual se apoiam. Segundo Colares (2006) "Vários são os casos de edificações que apresentaram algum tipo deformidade em decorrência de alterações não previstas no comportamento mecânico idealizado na análise estrutural.". Dentre as deformidades pode-se destacar a incidência de patologias graves, como fissuras em vigas e lajes ou até mesmo o esmagamento de pilares. Existem vários modelos propostos que possibilitam descrever o fenômeno da interação solo-estrutura, um dos mais difundidos e que será utilizado nesse trabalho para representar esse fenômeno é o de Winkler (1867) que consiste na substituição do solo por um conjunto de molas discretas. Aqui é apresentado o modelo gerado por Winkler (1867) e toda a formulação matricial para sua implementação no método dos deslocamentos. A partir disso foi feita uma análise de duas estruturas, um pórtico e uma viga em base elástica possibilitando uma verificação da influência do comportamento elástico da base da fundação. Foi possível a partir dos diagramas de momento fletor, esforço cortante e esforço normal obtidos verificar considerável alteração na distribuição de esforços nos elementos da estrutura e nas fundações. Também encontramos valores muito aproximados ao do Ftool com a consideração da utilização de barras deformáveis no lugar de molas aplicado ao método matricial dos deslocamentos.

**Palavras-chave: Interação Solo-Estrutura; Análise Matricial; Fundações.**

## ABSTRACT

The geotechnical design usually does not take into account the changes in the tensions generated due to the deformations in the soil, just as the superstructure design usually does not take into account the redistribution of the forces generated by these displacements. The separated consideration of structural and geotechnical studies comes from the high degree of complexity involved in evaluating these phenomena. Engineering projects without considering elastic supports can lead to a misinterpretation of the structure design. Several cases can be presented, for example, of buildings in Santos/SP in which clefts occur and other pathologies constitute direct examples of the need for joint analysis of the structures and massif on which they rely. According to Colares (2006) "There are several cases of buildings that presented some type of deformity due to changes not predicted in the mechanical behavior idealized in the structural analysis." Among the deformities, we can highlight the incidence of serious pathologies, such as cracks in beams and slabs or even the crushing of columns. There are several proposed models that make it possible to describe the phenomenon of soil-structure iteration, among the most widespread and that will be used in this work to represent this phenomenon is that of Winkler (1867), which consists of replacing the soil with a set of discrete springs. Here is presented the model generated by Winkler (1867) and the entire matrix formulation for the implementation of this model in the displacement method. From this, an analysis of two structures was made, a frame and a beam on an elastic base, enabling a verification of the influence of the elastic behavior of the foundation base. We also found values very close to those of  $F_{tool}$  with the consideration of the use of deformable bars in place of springs applied to the matrix method of displacements.

**Keywords: Iteration Soil-Structure; Matrix Analyses; Foundations.**

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 Camadas do maciço no modelo solo-estrutura.....	11
Figura 2 Modelo de molas de Winkler .....	12
Figura 3 Curva de Deformação da Base.....	15
Figura 4 Representação esquemática do modelo de Winkler.....	16
Figura 5 Modelo de aplicação de coeficiente de molas em apoio .....	17
Figura 6 Estrutura original.....	21
Figura 7 Molas para representar a deformabilidade do solo sob a fundação .....	21
Figura 8 Barras biarticuladas para representar as molas da figura 7 .....	22
Figura 9 Elemento de conexão horizontal no nó 4.....	22
Figura 10 Pórtico a ser analisado.....	26
Figura 11 Pórticos: (a)com a mola horizontal no nó 4 e (b) sem a mola.....	39
Figura 12 Pórticos deslocados: (a) com a mola horizontal e (b) sem a mola.....	39
Figura 13 Pórticos DMF: (a) com a mola horizontal e (b) sem a mola.....	39
Figura 14 Pórticos DEC: (a) com a mola horizontal e (b) sem a mola.....	40
Figura 15 Pórticos, DEN: (a) com a mola horizontal e (b) sem a mola .....	40
Figura 16 Viga em base elástica. ....	41
Figura 17 Viga sobre base elástica .....	50
Figura 18 Viga sobre base elástica - Deformada.....	50
Figura 19 Viga sobre base elástica - DMF .....	50
Figura 20 Viga sobre base elástica - DEC.....	51
Figura 21 Viga sobre base elástica .....	53
Figura 22 Tubulão em meio elástico .....	53

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 Valores obtidos para a estrutura 1 .....	52
Tabela 2 Valores obtidos para a estrutura 2 .....	52

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO</b> .....	10
1.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS E ESTADO DA ARTE .....	10
1.2. JUSTIFICATIVAS.....	13
1.3. OBJETIVOS .....	14
1.4. O ESCOPO DO TRABALHO .....	14
<b>2. O MODELO DE WINKLER E A ANALISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS</b> .....	15
2.1. MODELO DE WINKLER .....	16
2.2. FORMULAÇÃO LINEAR DO MÉTODO MATRICIAL DOS DESLOCAMENTOS PARA ESTRUTURAS PLANAS.....	17
<b>2.2.1. Considerações Históricas</b> .....	17
<b>2.2.2. O método</b> .....	18
<b>3. ANALISES DE ESTRUTURAS APORTICADAS VIA MOLAS DE WINKLER</b> .....	26
1. ANALISE DE ESTRUTURA 1 .....	26
1.1. ANALISE DA ESTRUTURA 2 .....	40
<b>2. ANALISE DOS RESULTADOS E CONCLUSÕES</b> .....	52
<b>3. CONCLUSÕES</b> .....	55

## 1. INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios atuais da engenharia de estruturas é a consideração dos efeitos de interação do maciço de solo e a fundação da estrutura. Quando submetida a solicitações externas o maciço de solo sofre deformações que provocam redistribuição de esforços nos elementos estruturais nele apoiado. Este mecanismo normalmente não é considerado nos projetos estruturais, onde as fundações são admitidas apoiadas sobre base rígida indeslocável.

Porem, com a ousadia dos arquitetos e dos engenheiros principalmente de materiais e de estruturas, as edificações estão cada vez mais esbeltas o que as torna mais susceptíveis aos efeitos da movimentação dos apoios. Desse modo, o procedimento ate pouco tempo utilizado satisfatoriamente de calcular os esforços nas fundações e com eles projetar estes elementos de fundação considerando todos os deslocamentos nulos, já não é adequando na maioria das estruturas das edificações modernas.

A identificação e quantificação dos efeitos devidos aos deslocamentos das fundações são possíveis com as análises que levem em conta o comportamento do solo e o da estrutura ao mesmo tempo. Este tipo de análise ficou conhecido no meio técnico pertinente com análise de interação solo-estrutura.

É importante ressaltar que através da consideração da interação solo – estrutura obtêm-se análises estruturais mais realistas na verificação dos estados limites, uma melhor avaliação dos recalques diferenciais e absolutos das fundações e da redistribuição dos esforços na estrutura.

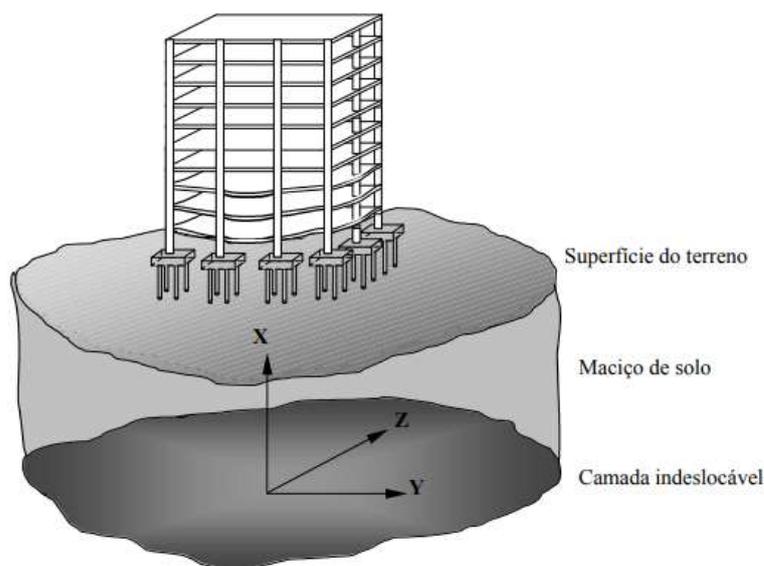
### 1.1. Considerações iniciais e estado da arte

A consideração separada dos estudos estruturais e geotécnicos advém do alto grau de complexidade envolvido em se avaliar esses fenômenos. O projeto geotécnico geralmente não leva em conta as alterações das tensões geradas devido às deformações no solo, assim como o projeto de superestrutura normalmente não leva em conta a redistribuição dos esforços gerados por esses deslocamentos. Portanto a análise da grandeza dos recalques e sua influência na redistribuição de esforços é um fator de grande importância para se avançar na qualidade dos resultados.

Uma das inúmeras vantagens em considerar a interação solo – estrutura é a possibilidade de estimar os efeitos da redistribuição de esforços nos elementos estruturais, a forma e a intensidade dos recalques diferenciais, tornando os projetos mais eficientes e confiáveis (IWAMOTO; 2000; p.2).

O processo usual se resume em uma análise inicial dos esforços da estrutura considerando apoios indeslocáveis, onde o carregamento atuante é analisado pelo engenheiro de fundações calculando o recalque da estrutura considerando um ponto de referência em uma camada rígida indeslocável. Estes estando dentro de valores aceitáveis, possibilita a elaboração do projeto. O processo falha quando um refinamento é necessário, pois os esforços iniciais da estrutura são modificados quando analisados considerando esses recalques, gerando novos esforços e novos valores de recalque até que o resultado convirja para valores dentro do limite de tolerância.

**Figura 1** Camadas do maciço no modelo solo-estrutura



**Fonte:** IWAMOTO (2000; p.2)

Existem diversos trabalhos que buscam metodologias para modelar a interação solo-estrutura, dentre eles três são considerados mais originais e inovadores.

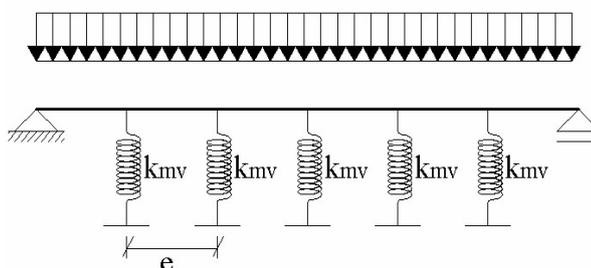
O modelo elaborado por Mindlin (1936) citado em Cruz (2007, p.29) onde considera o solo como meio homogêneo, isótropo e contínuo, fazendo uso da teoria da elasticidade e aplicação da lei de Hooke. Este impõe um conjunto de forças aplicadas nas três direções e com a utilização das implicações citadas, são geradas as condições de contorno de

deslocamentos nulos a grandes distâncias. Não é configurada uma situação próxima da real, o que justifica métodos que consideram o maciço finito e estratificado.

O segundo modelo é baseado na aplicação de métodos discretos de aproximação, principalmente os métodos das diferenças finitas, elementos de contorno e elementos finitos. O ultimo é muito eficiente em problemas planos, mas gera um grande processamento de dados em problemas tridimensionais.

O terceiro modelo e mais difundido utilizado nesse trabalho para representar esse fenômeno é o de Winkler (1867) que consiste na substituição do solo por um conjunto de molas discretas. Emil Winkler foi o primeiro a formular e resolver o problema da viga elástica sobre base deformável. Este modelo de viga sobre fundação elástica que assume a relação força - deslocamento como uma relação linear é conhecido como fundação de Winkler. Geralmente são utilizadas correlações empíricas para determinar os coeficientes de rigidez das molas o que pode prejudicar os resultados. A maior vantagem do modelo é sua simplicidade e facilidade de implementação computacional além de gerar resultados satisfatórios em termos de recalques, tensões e esforços para análises.

**Figura 2 Modelo de molas de Winkler**



**Fonte: Cruz (2020, no prelo)**

Para a compreensão do fenômeno interativo entre o solo e a estrutura é necessário ver o comportamento do solo quando submetido a carregamento dos edifícios. Pois de acordo com Cintra, Aoki e Albiero (2011) durante o carregamento ocorrem deslocamentos verticais que podem variar na ordem de centímetros a centenas de centímetros.

Outro fator fundamental no processo é a rigidez da estrutura, que quanto maior faz com que os recalques teóricos sejam maiores que os que realmente acontecem.

A previsão do comportamento do solo é um dos desafios da mecânica dos solos, os modelos adotados consideram três tipos de recalques que se originam de fenômenos diferentes, fazendo com que a mecânica dos solos avance tratando-os separadamente:

- Recalques imediatos ou elásticos

Ocorrem predominantemente em solos arenosos e independe do tempo. Resultam da deformação quase instantânea do solo sem que ocorra a redução do índice de vazios quando aplicado o carregamento.

Embora o solo não seja um material elástico, esse recalque pode ser modelado usando a teoria da elasticidade.

- Recalque por adensamento primário

Ocorre devido à expulsão de água dos vazios de solo, verifica-se geralmente em solos poucos permeáveis devido a camada subjacente a esse.

‘O método mais utilizado para prever o adensamento de solos saturados é o de Terzaghi (1923). Baseado em modelo análogo a um comportamento de água-mola.

- Recalque por adensamento secundário

Verifica-se devido a fluência do esqueleto sólido que ocorre após a dissipação de todas as pressões neutras.

O adensamento secundário ocorre quando cessadas todas as pressões neutras, sendo determinado admitindo uma variação linear dos deslocamentos ao longo do tempo.

## **1.2. Justificativas**

Os projetos de engenharia sem a consideração de apoios elásticos podem levar a uma interpretação errada do dimensionamento da estrutura. Casos de prédios em Santos/SP nos quais ocorrem fissuras e outras patologias se constituem em exemplos diretos da necessidade de análise em conjunto das estruturas e do maciço no qual se apoiam.

Segundo Colares (2006), citado por Pavan; Costella; Guarnieri (2014, p.) "Vários são os casos de edificações que apresentaram algum tipo deformidade em decorrência de alterações não previstas no comportamento mecânico idealizado na análise estrutural".

Dentre as deformidades pode-se destacar a incidência de patologias graves, como fissuras em vigas e lajes ou até mesmo o esmagamento de pilares.

Portanto é inegável a importância da alteração dos esforços que da aplicação do processo resulta, sendo necessário cada vez mais avançar no processo de análise estrutural.

### **1.3. Objetivos**

Visando obter resultados mais realistas para analisar o comportamento solo-estrutura, neste TCC busca-se obter e apresentar o equacionamento para a análise de pórticos planos sobre apoios considerados deslocáveis.

### **1.4. O Escopo do trabalho**

Considerando que o presente trabalho é resposta às exigências para a obtenção do grau de bacharel em engenharia civil, portanto ao nível de graduação, ele se limita, no que diz respeito à abrangência teórica, à análise de estruturas de comportamento linear em estruturas reticuladas.

Desse modo, tem-se que quanto aos procedimentos para análise estrutural a formulação será limitada à formulação linear do Método Matricial dos Deslocamentos, MMD.

Em razão disto, o desenvolvimento que aqui se dará ao tema é a partir do estudo da interação solo-estrutura associado aos esforços e deslocamentos calculados para pontos nodais da estrutura analisada quando se tratar de deslocamentos e esforços nas coordenadas vinculadas de estruturas reticuladas ou subdividindo a estrutura ou elemento estrutural em vários elementos de barra, em cujas extremidades serão analisados os efeitos da base elástica.

Assim, o Modelo de Winkler será considerado através de molas aplicadas segundo as coordenadas globais da estrutura de acordo com a necessidade verificada em cada caso.

## 2. O MODELO DE WINKLER E A ANALISE MATRICIAL DE ESTRUTURAS

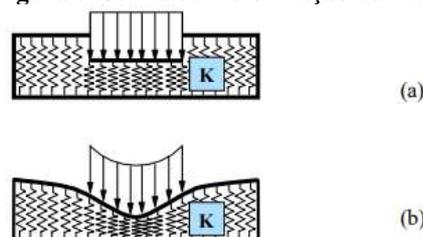
Observa-se que na análise de muitas estruturas simples, principalmente isostáticas, e em outras situações praticas, busca-se com uma análise em base elástica as forças e os deslocamentos na interface dessa base e o elemento de fundação da estrutura. Então, em resposta a essa necessidade pratica surgem os modelos matemáticos simples para descrever, com a precisão requerida, o comportamento da base elástica.

Assim, têm-se alguns modelos matemáticos que consideram apenas um único parâmetro que é o coeficiente de rigidez do solo para a definição das propriedades do material constituinte da fundação elástica. Neste sentido dois modelos podem ser citados: o proposto por Winkler e o sistema de molas discretas, dispostas ao longo da região de contato. São modelos nos quais a interação entre as molas não são consideradas assim como não há respostas para solicitações de tração.

De acordo com Silva (2004, p.) estes, são considerados métodos bastante simples se comparado a outros métodos de modelagem que apresentam mais de um parâmetros na definição do comportamento da base elástica. Exemplos desses modelos são os de Pasternak, Filonenko-Borodich e Vlasov que de alguma forma assumem as interações entre as molas.

Conquanto a aplicação desses métodos de um único parâmetro seja relativamente de fácil implementação, os resultados obtidos através da sua aplicação muitas vezes não correspondem à realidade física por eles matematicamente representados, o modelo adotado por Winker é representado na figura 3. A determinação da rigidez do solo é um parâmetro que requer atenção especial dado à grande variabilidade dos tipos e características do solo. Por outro lado, o entendimento de que a fundação se deforma apenas na região na qual atua o carregamento, segundo Hetenyi (1946) citafo por Silva (2004, p.8) é verdadeiro para muitos solos.

Figura 3 Curva de Deformação da Base

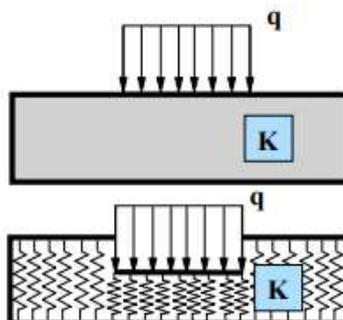


Fonte: Silva (1998)

## 2.1. Modelo de Winkler

Prever o comportamento do solo é uma tarefa complexa devido a variabilidade das características envolvidas, mas apesar de o solo não ser um material com comportamento elástico as análises normalmente utilizadas comparam as tensões aplicadas com tensões admissíveis através de uma relação carga deslocamentos relacionadas por um coeficiente de rigidez como apresentado na figura 4.

Figura 4 Representação esquemática do modelo de Winkler



Fonte: Silva (1998)

O modelo de Winkler admite que as deflexões na viga sejam diretamente proporcionais aos esforços normais, podendo ser interpretadas pela seguinte equação.

$$P = k_s \delta$$

(2.1)

Em que:

- $P$  é a carga de contato na base das fundações;
- $k_s$  é o módulo de reação vertical, parâmetro de rigidez elástica do solo;
- $\delta$  é o deslocamento vertical.

Para a determinação do coeficiente de mola representado na figura 6, considera-se o módulo de reação vertical sobre a área de atuação da carga.

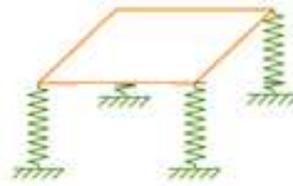
$$K = \frac{k_s}{A_f}$$

(2.2)

Em que:

- $K$  coeficiente de apoio elástico;
- $k_s$  é o modulo de reação vertical;
- $A_f$  é a área carregada.

**Figura 5 Modelo de aplicação de coeficiente de molas em apoio**



Fonte: O Autor

O modulo de reação vertical  $k_s$  depende de diversos fatores tais como:

- forma e dimensão da fundação;
- tipo de construção;
- mudanças de carregamento.

Em geral o coeficiente e determinado de três maneiras:

- Ensaio de placa;
- Tabelas de valores típicos;
- Correlações com o módulo de elasticidade.

## **2.2. Formulação linear do Método Matricial dos deslocamentos para estruturas planas.**

### **2.2.1. Considerações Históricas**

O método de rigidez (ou dos deslocamentos) existe há aproximadamente 150 anos. Navier em 1826 foi talvez o primeiro a usa-lo. Embora seja difícil afirmar o pioneiro na utilização do calculo matricial na análise estrutural, sabe-se que em documentos de Bendixen (1914) e Ostenfeld (1926), citado em Cruz (2020, no prelo). Entretanto em 1940 trabalhos foram publicados utilizando a álgebra matricial em análises de estruturas. Devido às dificuldades na solução de sistemas de equações à ideia não foi dada a devida atenção.

Somente com a chegada dos computadores, a análise matricial passou a ser implementada. O método dos deslocamentos foi o que melhor se adaptou ao cálculo automático, passando assim a se sobrepor ao Método Matricial das Forças.

Em 1954, Argyris, ligado á indústria aeronáutica, promoveu grande desenvolvimento e divulgação dos métodos de análise estrutural através da álgebra matricial nos EUA. Esta é, também, a data do surgimento dos primeiros programas.

No Brasil, Fernando Venâncio Filho, do ITA, publica o primeiro trabalho brasileiro, em 1960, intitulado “Matrix analyses of plane rigid frames”, que foi publicado em 1962 na revista “Estrutura” n<sup>os</sup> 42 e43, sob o título “Formulação Matricial da Hiperestática”, após ter sido generalizado para qualquer tipo de estrutura reticulada.

Considera-se que a formulação matricial para a análise estrutural é a precursora dos grandes métodos de análise hoje existentes, como o Método dos Elementos Finitos, o Método das Diferenças Finitas e o Método dos Elementos de Contorno.

### 2.2.2. O método

A análise de uma estrutura subentende a determinação de todas as solicitações internas, das deformações e dos deslocamentos ocorridos, provenientes da ação dos esforços externos que nela atuam.

Caracteriza o método dos deslocamentos o uso das equações de equilíbrio depois das equações de compatibilidade. Neste caso, os deslocamentos nodais são as incógnitas (incógnitas cinéticas) a serem determinadas primeiramente, enquanto os esforços nas extremidades das barras e as reações dos apoios serão conhecidos posteriormente. Nesse método, considerada a notação matricial, a equação principal é do tipo:

$$\{P\} = [K]\{D\}.$$

(2.3)

$\{P\}$  é o vetor dos esforços externos nodais;

$[K]$  é a matriz de rigidez da estrutura;

$\{D\}$  é o vetor dos deslocamentos nodais da estrutura

A matriz  $[K]$  de rigidez da estrutura é obtida a partir de uma soma conveniente das rigidezas das barras referidas ao Sistema Global de Referência, SGR. As matrizes de rigidez das barras referidas ao SGR são aqui representadas por  $[k]'$  e quando referidas ao Sistema Local de Referência, SLR, por  $[k]$ .

É possível considerar que a aplicação do método matricial dos deslocamentos inicia com as equações força-deslocamentos. Resolvidas estas equações, obtêm-se inicialmente os deslocamentos incógnitos para em seguida, e com estes, serem calculadas as reações dos apoios. É também a partir dos deslocamentos nodais, com as equações de compatibilidade, que são calculados os esforços nas extremidades das barras.

As equações força-deslocamento, por sua vez, são obtidas das condições de equilíbrio, das equações de compatibilidade e, conhecidos os coeficientes de rigidez da estrutura como mostrado na Eq. (2.4).

$$\begin{aligned} P_1 &= K_{11}D_1 + K_{12}D_2 + K_{13}D_3 + \dots + K_{19}D_9 \\ P_2 &= ..K_{21}D_1 + K_{22}D_2 + K_{23}D_3 + \dots + K_{29}D_9 \\ P_3 &= ..K_{31}D_1 + K_{32}D_2 + K_{33}D_3 + \dots + K_{39}D_9 \end{aligned}$$

(2.4)

em que:

$P_i$  é o esforço externo nodal na coordenada  $i$

$K_{i,j}$  é o coeficiente de rigidez da estrutura ou global, que associa esforço na coordenada  $i$  com deslocamento nodal na coordenada  $j$ .

$D_j$  é o deslocamento nodal na coordenada  $j$

Este sistema de equações, quando escrito na forma matricial, resulta na Eq. (2.5), que pode ser reescrita com notação ao nível de coordenadas livres e coordenadas vinculadas, como segue:

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_C \\ \{P\}_R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{CC} & [K]_{CR} \\ [K]_{RC} & [K]_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_C \\ \{D\}_R \end{Bmatrix}$$

(2.5)

Em que:

$\{P\}_C$  Esforços externos nodais nas coordenadas não vinculadas (o carregamento nodal),

$\{P\}_R$  Esforços externos nodais nas coordenadas vinculadas (as reações de apoio),

$[K]_{CC}$  Submatriz de rigidez global que associa o  $\{P\}_C$  ao  $\{D\}_C$ ,

$[K]_{CR}$  Submatriz de rigidez global que associa o  $\{P\}_C$  ao  $\{D\}_R$ ,

$[K]_{RC}$  Submatriz de rigidez global que associa o  $\{P\}_R$  ao  $\{D\}_C$ ,

$[K]_{RR}$  Submatriz de rigidez global que associa o  $\{P\}_R$  ao  $\{D\}_R$ ,

$\{D\}_C$  Deslocamentos nodais nas coordenadas não vinculadas,

$\{D\}_R$  Deslocamentos nodais nas coordenadas vinculadas (nos apoios),

Da solução da equação matricial, obtém-se a Eq. (2.6):

$$\{P\}_C = [K]_{CC} \{D\}_C + [K]_{CR} \{D\}_R$$

(2.6)

$$\{P\}_R = [K]_{RC} \{D\}_C + [K]_{RR} \{D\}_R$$

(2.7)

O vetor  $\{D\}_R$  poderá ser considerado nulo nos casos em que as fundações da estrutura não sejam consideradas apoiadas em base elástica (isto é, em base deformável). Este vetor poderá ser também, considerado conhecido, por ter sido definido a partir de cálculos simplificados que adotam uma estimativa de carga e uma estimativa para a *rigidez* (coeficiente de adensamento) do solo.

Sendo  $\{D\}_R = \{0\}$ , o cálculo dos deslocamentos nodais das coordenadas nodais livres, (isto é não vinculadas) é feito a partir da Eq. (2.6), como segue:

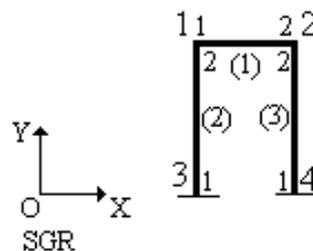
$$\{D\}_C = [K]_{CC}^{-1} \{P\}_C \quad (2.8)$$

Quando os deslocamentos  $\{D\}_R$  são pré-definidos, com pelo menos um deles diferente de zero, então o cálculo do  $\{D\}_C$  será feito como segue:

$$\{D\}_C = \frac{\{P\}_C - [K]_{CR} \{D\}_R}{[K]_{CC}} \quad (2.9)$$

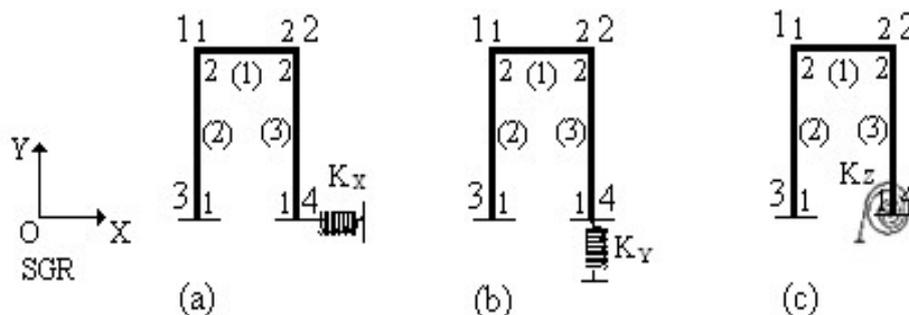
Por fim, se a fundação estiver assente em base deformável então para a consideração da deslocabilidade da fundação nas direções estabelecidas pelo SGR, serão colocadas molas nestas coordenadas e a análise da estrutura original deverá levar em conta, agora, a estrutura equivalente. Isto é considerando também as barras que representarão as molas e os novos nós que surgirão. Com o mostrado nas Figuras 6; 7; 8 e 9.

Figura 6 Estrutura original



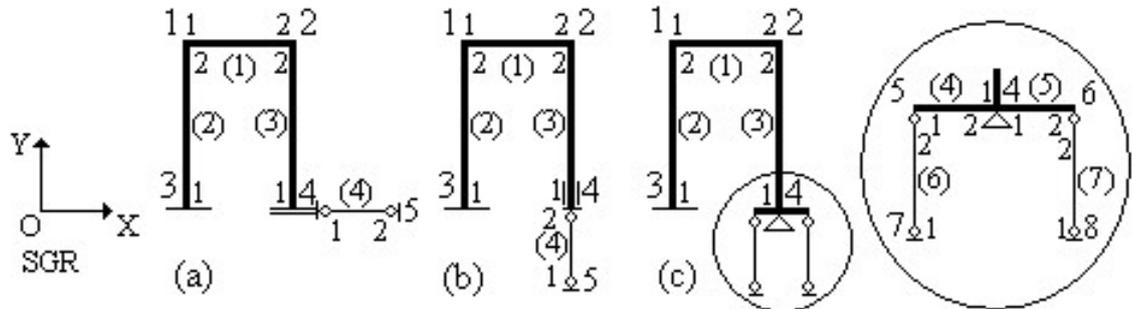
Fonte: CRUZ (2020, no prelo)

Figura 7 Molas para representar a deformabilidade do solo sob a fundação



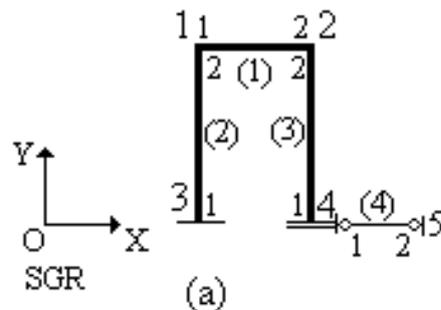
Fonte: CRUZ (2020, no prelo)

Figura 8 Barras biarticuladas para representar as molas da figura 7



Fonte: CRUZ (2020, no prelo)

Figura 9 Elemento de conexão horizontal no nó 4



Fonte: CRUZ (2020, no prelo)

Na Figura 6, tem-se o pórtico a ser analisado, a representação esquemática indica que o nó 4 será considerado indeslocável. Na Figura 7 (a), (b) e (c) as molas indicam que agora o nó 4, um dos dois apoios do pórtico, será analisado sob o efeito de base elástica. Na Figura 7 (a), a mola horizontal ali colocada interpreta a deformabilidade da base do apoio da fundação na direção horizontal ou do eixo X do SGR. Na Figura 7(b) a deformabilidade considerada é na vertical ou eixo Y do SGR. Na Figura 7(c) a mola é de rotação, ela considera então a deformabilidade do maciço quanto ao efeito de momento.

Na Figura 8 as molas foram substituídas por barras biarticuladas cuja rigidez axial,  $\frac{EA}{L} = k_{11}$ , deve ser igual ao k da mola que ela representa. A mola de rotação, Figura 7 (c) é substituída por um esquema representado por duas barras, também, biarticuladas uma em cada extremidade de uma barra perfeitamente rígida que recebe a extremidade 1 da barra

(3), estando apoiada exatamente no ponto (ou nó) 4. O apoio ali colocado é do tipo apoio fixo.

A Figura 9, que repete a Figura 8(a), mostra o pórtico original com uma barra horizontal biarticulada que chega ao nó 4. Esta é a estrutura que será analisada a seguir para o estabelecimento da formulação a ser aplicada quando da consideração de base(s) elástica(s).

Análise do pórtico da Figura 8.

Montagem da equação  $\{P\} = [K]\{D\}$

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} & K & K & K & K_{1,10} & K_{1,11} & K_{1,12} & 0 & 0 & 0 \\ K_{2,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{3,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{4,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{5,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{6,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & 0 & 0 & 0 \\ K_{10,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k_{11(3)} + k_h & k_{12(3)} & k_{13(3)} & -k_h & 0 & 0 \\ K_{11,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k_{21(3)} & k_{22(3)} & k_{23(3)} & 0 & 0 & 0 \\ K_{12,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k_{31(3)} & k_{32(3)} & k_{33(3)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -k_h & 0 & 0 & k_h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_{10} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

Da observação da Eq. (2.10) percebe-se que as duas últimas linhas e colunas podem ser dela retiradas resultando a Eq. (2.11), mostrada a seguir.

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \\ P_9 \\ P_{10} \\ P_{11} \\ P_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} & K_{1,4} & K_{1,5} & K_{1,6} & K & K & K & K_{1,10} & K_{1,11} & K_{1,12} \\ K_{2,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{3,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{4,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{5,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{6,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K & K \\ K_{10,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k_{11(3)} + k_b & k_{12(3)} & k_{13(3)} \\ K_{11,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k_{21(3)} & k_{22(3)} & k_{23(3)} \\ K_{12,1} & K & K & K & K & K & K & K & K & k_{31(3)} & k_{32(3)} & k_{33(3)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_{10} \\ D_{11} \\ D_{12} \end{Bmatrix}$$

(2.11)

È importante notar que na equação matricial, Eq. (2.11), todos os coeficientes são exatamente iguais aos que seriam obtidos para o pórtico original. Somente o coeficiente  $K_{10,10}$  foi alterado, pois a ele foi acrescentado o coeficiente da mola horizontal.

$$[K] = 10^2 \begin{bmatrix} 1,5 & 0 & -3 & -1,5 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 8 & 3 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 3 & 151,5 & 0 & 3 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 0 & 151,5 & 3 & 0 & -1,5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 3 & 3 & 16 & 0 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -150 & 0 & 0 & 150,768 & 0 & -1,92 & -0,768 & 0 & 1,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & -3 & 0 & 121,5 & -3 & 0 & -120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1,92 & -3 & 14,4 & -1,92 & 0 & 3,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,768 & 0 & -1,92 & 0,768+10 & 0 & -1,92 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -120 & 0 & 0 & 120 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,92 & 0 & 3,2 & -1,92 & 0 & 6,4 \end{bmatrix}$$

(2.12)

Como estamos no campo de validade da formulação linear do método dos deslocamentos então a superposição de causas e efeitos é válida. Assim, o desenvolvimento apresentado pode ser desenvolvido para a mola vertical e para a mola

rotacional e as conclusões colocadas na matriz de rigidez de um único elemento de conexão.

$$[k]' = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 & -k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 & -k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 & 0 & -k_z \\ -k_x & 0 & 0 & k_x & 0 & 0 \\ 0 & -k_y & 0 & 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & -k_z & 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

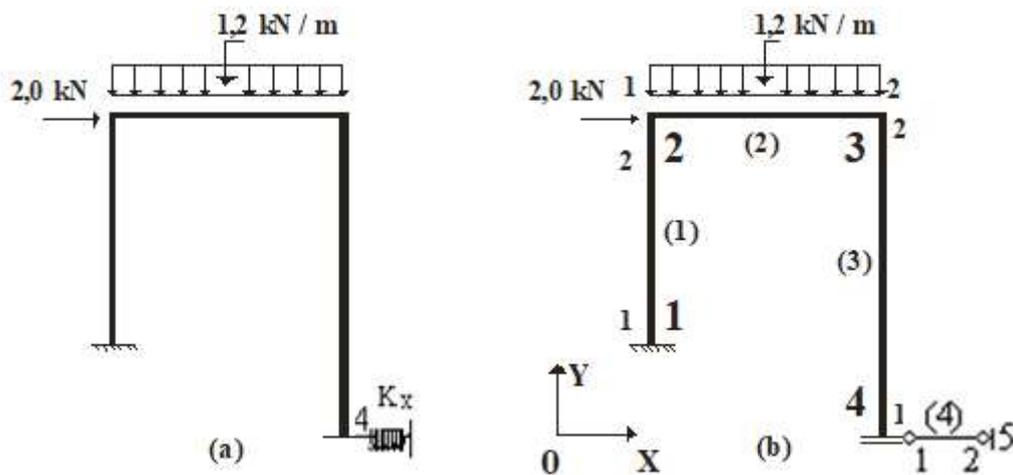
(2.13)

### 3. ANALISES DE ESTRUTURAS APORTICADAS VIA MOLAS DE WINKLER

- **Análise de estrutura 1**

Neste subitem será analisado o pórtico plano da Figura 10 no qual se considera a base deformável horizontalmente, no apoio do nó 4. Semelhante a Figura 10 (a).

Figura 10 Pórtico a ser analisado



Fonte: Cruz (2020, no prelo)

Dados:

$$E = 20000000 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$A = 0,03 \text{ m}^2$$

$$I = 0,0004 \text{ m}^4$$

$$L_1 = L_2 = 4 \text{ m}$$

$$L_3 = 5 \text{ m}$$

$$K_{m,h} = K_x = 10 \text{ kN} / \text{m}$$

#### Solução:

##### a) Discretização e modelagem

- Ver Figura 10(b).

**b) As matrizes de rigidez**

- Matriz de rigidez da barra (1),  $[k]_{(1)}$

$$[k]_{(1)} = \begin{bmatrix} 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 & 0 \\ 0 & 150 & 300 & 0 & -150 & 300 \\ 0 & 300 & 800 & 0 & -300 & 400 \\ -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & -300 & 0 & 150 & -300 \\ 0 & 300 & 400 & 0 & -300 & 800 \end{bmatrix}$$

(3.1)

- Matriz de rigidez da barra (2),  $[k]_{(2)}$

Sendo a barra (2) do mesmo comprimento e do mesmo material que a barra (1), e tendo aquela a mesma seção transversal e as mesmas condições de contorno que a desta, então:

$$[k]_{(1)} = [k]_{(2)}$$

(3.2)

- Matriz de rigidez da barra (3),  $[k]_{(3)}$

$$[k]_{(3)} = \begin{bmatrix} 12000 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 \\ 0 & 76,8 & 192 & 0 & -76,8 & 192 \\ 0 & 192 & 640 & 0 & -1920 & 320 \\ -12000 & 0 & 0 & 12000 & 0 & 0 \\ 0 & -76,8 & -192 & 0 & 76,8 & -192 \\ 0 & 192 & 320 & 0 & -192 & 640 \end{bmatrix}$$

(3.3)

- Matriz de rigidez da barra (4),  $[k]_{(4)}$

$$[k]_{(4)} = \begin{bmatrix} k_{mh} & 0 & 0 & -k_{mh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_{mh} & 0 & 0 & k_{mh} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.4)

### c) As matrizes de rotação

- Matriz de rotação da barra (1),  $[T]_{(1)}$  com  $\alpha = 90^\circ$

$$[T]_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.5)

- Matriz de rotação da barra (2),  $[T]_{(2)}$  com  $\alpha = 0^\circ$

$$[T]_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.6)

- Matriz de rotação da barra (3),  $[T]_{(3)}$

Sendo a barra (3) paralela à barra (1), e tendo aquela incidência crescente no mesmo sentido desta, então:

$$[T]_{(1)} = [T]_{(3)}$$

(3.7)

- Matriz de rotação da barra (4),  $[T]_{(4)}$

Sendo a barra (4) paralela à barra (2), e tendo aquela incidência crescente no mesmo sentido desta, então:

$$[T]_{(2)} = [T]_{(4)} \quad (3.8)$$

#### d) As matrizes de incidência

- Matriz de incidência da barra (1),  $[a]_{(1)}$

$$[a]_{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

- Matriz de incidência da barra (2),  $[a]_{(2)}$

$$[a]_{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

- Matriz de incidência da barra (3),  $[a]_{(3)}$

$$[a]_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.11)

- Matriz de incidência da barra (4),  $[a]_{(4)}$

$$[a]_{(4)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.12)

#### d) Determinação do vetor $\{p_0\}$ de cada uma das barras

Como não atuam cargas ao longo do eixo longitudinal da barra (1) e da (3), os vetores  $\{p_0\}_{(1)}$  e  $\{p_0\}_{(3)}$  são nulos.

Considerando a barra (2) como uma viga biengastada com o carregamento ao longo do seu eixo longitudinal indicado na Fig.10 as reações dos apoios serão os elementos do vetor  $\{p_0\}_{(2)}$ .

Logo:

$$\{p_0\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 0kN \\ 2,4kN \\ 1,6kNm \\ 0kN \\ 2,4kN \\ -1,6kNm \end{Bmatrix}$$

(3.13)

**e) Determinação do vetor  $\{p_0\}'$  de cada uma das barras**

Sendo nulos os vetores  $\{p_0\}_{(1)}$  e  $\{p_0\}_{(3)}$ , então,  $\{p_0\}'_{(1)}$  e  $\{p_0\}'_{(3)}$  serão nulos também. Com o vetor  $\{p_0\}_{(2)}$  e com a matriz  $[T]_{(2)} = [I]$ , dada na Eq. (3.8), calcula-se o vetor  $\{p_0\}'_{(2)}$ , obtendo-se:

$$[p_0]'_{(2)} = [p_0]_{(2)} \quad (3.14)$$

**f) Determinação do vetor  $\{P_0\}$**

O vetor  $\{P_0\}$  pode ser obtido através do somatório:  $\sum_{i=1}^n [a]_{(i)}^T \{p_0\}'_{(i)}$ , em que  $n$  é o número de barras da estrutura. Devido ao fato de  $\{p_0\}'_{(1)}$  e  $\{p_0\}'_{(3)}$  serem nulos, então  $\{P_0\} = [a]_{(2)}^T \{p_0\}'_{(2)}$ , com  $\{p_0\}'_{(2)}$  dado na Eq. (3.13) e, sendo  $[a]_{(2)}^T$  a transposta da matriz dada na Eq.(3.10).

Logo:

$$\{P_0\}^T = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2,4 \ 1,6 \ 0 \ 2,4 \ -1,6 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0\} \quad (3.15)$$

$$\{P_0\}^T = \{\{P_0\}_1^T \ \{P_0\}_2^T \ \{P_0\}_3^T \ \{P_0\}_4^T \ \{P_0\}_5^T\} \quad (3.15a)$$

g) Obtenção dos vetores  $\{P\}$  e  $\{D\}$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} \{P\}_1 \\ \{P\}_2 \\ \{P\}_3 \\ \{P\}_4 \\ \{P\}_5 \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.16 - \text{"a"} \text{ e } \text{"b"})$$

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} \{D\}_1 \\ \{D\}_2 \\ \{D\}_3 \\ \{D\}_4 \\ \{D\}_5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D \\ D_9 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.17 - \text{"a"} \text{ e } \text{"b"})$$

“b”)

h) Obtenção da matriz de rigidez de cada uma das barras da estrutura, referidas ao sistema global -  $[k]$ , através da expressão  $[k]^g = [T].[k][T]^T$ .

- Matriz de rigidez da barra (1), no sgr,  $[k]_{(1)}^g$

$$[k]_{(1)}'' = \begin{bmatrix} 150 & 0 & -300 & -150 & 0 & -300 \\ 0 & 15000 & 0 & 0 & -15000 & 0 \\ -300 & 0 & 800 & 300 & 0 & 400 \\ -150 & 0 & 300 & 150 & 0 & 300 \\ 0 & -15000 & 0 & 0 & 15000 & 0 \\ -300 & 0 & 400 & 300 & 0 & 800 \end{bmatrix}$$

(3.18)

- Matriz de rigidez da barra (2), no sgr,  $[k]_{(2)}''$

Para a barra (2), sendo  $[T]_{(2)} = [I]$ , tem-se que:

$$[k]_{(2)}'' = [k]_{(2)}$$

(3.19)

- Matriz de rigidez da barra (3), no sgr,  $[k]_{(3)}''$

$$[k]_{(3)}'' = \begin{bmatrix} 76,8 & 0 & -192 & -76,8 & 0 & -192 \\ 0 & 12000 & 0 & 0 & -12000 & 0 \\ -192 & 0 & 640 & 192 & 0 & 320 \\ -76,8 & 0 & 192 & 76,8 & 0 & 192 \\ 0 & -12000 & 0 & 0 & 12000 & 0 \\ -192 & 0 & 320 & 192 & 0 & 640 \end{bmatrix}$$

(3.20)

- Matriz de rigidez da barra (4), no sgr,  $[k]_{(4)}''$

Para a barra (4), sendo  $[T]_{(4)} = [I]$ , tem-se que:

$$[k]_{(4)}^T = [k]_{(4)}$$

(3.21)

i) **Obtenção da matriz de rigidez  $[K]$  da estrutura e montagem da equação**

$$\{P\} = [K]\{D\}. [K], \text{ (através do procedimento prático)}$$

Escrevendo-se a matriz  $[K]$  com notação ao nível de nó, tem-se:

$$[K] = \begin{bmatrix} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} & [K]_{15} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} & [K]_{25} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} & [K]_{35} \\ [K]_{41} & [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} & [K]_{45} \\ [K]_{51} & [K]_{52} & [K]_{53} & [K]_{54} & [K]_{55} \end{bmatrix}$$

(3.22)

na qual cada elemento é uma submatriz  $[K]_{ij}$ , quadrada com  $n = 3$ , que associa os deslocamentos do nó  $j$  aos esforços do nó  $i$ . A obtenção da matriz  $[K]$  se dará com a determinação de todas as submatizes  $[K]_{ij}$ .

- Determinação dos  $[K]_{i,j}$

$$[K]_{11} = [k]_{1,1(1)}^T$$

$$[K]_{12} = [K]_{21}^T = [k]_{1,2(1)}^T$$

$$[K]_{13} = [K]_{31}^T = [0]$$

$$[K]_{14} = [K]_{41}^T = [0]$$

$$[K]_{15} = [K]_{51}^T = [0]$$

$$[K]_{22} = [k]_{22(1)}^T + [k]_{11(2)}^T$$

$$\begin{aligned}
[K]_{23} &= [K]_{32}^T = [k]_{1,2(2)}'' \\
[K]_{24} &= [K]_{42}^T = [0] \\
[K]_{25} &= [K]_{52}^T = [0] \\
[K]_{33} &= [k]_{2,2(2)}'' + [k]_{2,2(3)}'' \\
[K]_{34} &= [K]_{43}^T = [k]_{2,1(3)}'' \\
[K]_{44} &= [k]_{1,1(3)}'' + [k]_{1,1(4)}'' \\
[K]_{45} &= [K]_{54}^T = [k]_{1,2(4)}'' \\
[K]_{55} &= [k]_{2,2(4)}'' \quad (3.23 - \text{"a", "b", "c", "d", "e", "f", "g", "h", "i", "j" e} \\
&\quad \text{"l"})
\end{aligned}$$

Cada  $[k]_{ij(b)}''$  é uma submatriz da matriz de rigidez da barra em exame. Procedendo-se à adequada substituição das  $[k]_{ij(b)}''$ , a partir das Eqs. (3.18), (3.19), (3.20), e (3.21), e organizando-as conforme a Eq. (3.22), obtém-se, a matriz de rigidez da global ou da estrutura.

**j) Montagem da equação  $\{P\} = [K]\{D\} + \{P_0\}$**

Com a utilização da notação ao nível de nó, a equação  $\{P\} = [K]\{D\} + \{P_0\}$  terá a forma apresentada na Eq. (3.24).

$$(3.24) \quad \left\{ \begin{array}{c} [P]_1 \\ [P]_2 \\ [P]_3 \\ [P]_4 \\ [P]_5 \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{ccccc} [K]_{11} & [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} & [K]_{15} \\ [K]_{21} & [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} & [K]_{25} \\ [K]_{31} & [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} & [K]_{35} \\ [K]_{41} & [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} & [K]_{45} \\ [K]_{51} & [K]_{52} & [K]_{53} & [K]_{54} & [K]_{55} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} [D]_1 \\ [D]_2 \\ [D]_3 \\ [D]_4 \\ [D]_5 \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} [P_0]_1 \\ [P_0]_2 \\ [P_0]_3 \\ [P_0]_4 \\ [P_0]_5 \end{array} \right\}$$

Cada  $\{P\}_i, \{D\}_i$  e  $\{P_0\}_i$  é, na ordem, o vetor dos esforços externos; o dos deslocamentos e, por ultimo, o vetor dos esforços decorrentes das cargas aplicadas fora dos nós, todos verificados no nó  $i$ .

**k) Solução da equação  $\{P\} = [K]\{D\} + \{P_0\}$**

Solução em duas partes: sendo a primeira  $\{P\}_C = [K]_{CC}\{D\}_C + \{P_0\}_C$  e a outra,  $\{P\}_R = [K]_{RC}\{D\}_C + \{P_0\}_R$ , das quais foram excluídas respectivamente as parcelas  $[K]_{CR}\{D\}_R$  e  $[K]_{RR}\{D\}_R$  devido ao fato dos deslocamentos nas coordenadas vinculadas serem nulas. Observa-se que as coordenadas associadas aos nós 2 e 3 com a coordenada 10 associada à direção X no nó 4 (onde a mola atua) são os componentes do vetor  $\{P\}_C$  e, analogamente, as coordenadas associadas às direções Y e Z do nó 4 e às associadas aos nós nó 1 e 5 são os componentes do vetor  $\{P\}_R$  (acontecendo de modo semelhante com os deslocamentos e com o vetor  $\{P_0\}$ ). Devido a isto, se faz necessário mudar a posição da linha correspondente ao  $\{P\}_1$  (primeira linha) para a quarta linha. Para que não ocorra alteração no valor do determinante da matriz de rigidez global, altera-se, obrigatoriamente, a posição da primeira coluna da referida matriz, colocando-a na quarta posição. Assim, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_2 \\ \{P\}_3 \\ \{P\}_4 \\ \{P\}_1 \\ \{P\}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{22} & [K]_{23} & [K]_{24} & [K]_{21} & [K]_{25} \\ [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} & [K]_{31} & [K]_{35} \\ [K]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} & [K]_{41} & [K]_{45} \\ [K]_{12} & [K]_{13} & [K]_{14} & [K]_{11} & [K]_{15} \\ [K]_{52} & [K]_{53} & [K]_{54} & [K]_{51} & [K]_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_2 \\ \{D\}_3 \\ \{D\}_4 \\ \{D\}_1 \\ \{D\}_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{P_0\}_2 \\ \{P_0\}_3 \\ \{P_0\}_4 \\ \{P_0\}_1 \\ \{P_0\}_5 \end{Bmatrix} \quad (3.25)$$

Na Eq. (3.25a) que repete a equação anterior, estão indicadas as submatrizes nulas.

$$\begin{Bmatrix} \{P\}_2 \\ \{P\}_3 \\ \{P\}_4 \\ \{P\}_1 \\ \{P\}_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [K]_{22} & [K]_{23} & [0]_{24} & [K]_{21} & [0]_{25} \\ [K]_{32} & [K]_{33} & [K]_{34} & [0]_{31} & [K]_{35} \\ [0]_{42} & [K]_{43} & [K]_{44} & [0]_{41} & [K]_{45} \\ [K]_{12} & [0]_{13} & [0]_{14} & [K]_{11} & [0]_{15} \\ [0]_{52} & [0]_{53} & [K]_{54} & [0]_{51} & [K]_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{D\}_2 \\ \{D\}_3 \\ \{D\}_4 \\ \{D\}_1 \\ \{D\}_5 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{P_0\}_2 \\ \{P_0\}_3 \\ \{0\}_4 \\ \{0\}_1 \\ \{0\}_5 \end{Bmatrix}$$

(3.25a)

### l) Cálculo dos deslocamentos nas coordenadas nulas

Agora, resolvendo  $\{P\}_C = [K]_{CC}\{D\}_C + \{P_0\}_C$ , tem-se:

$$\begin{Bmatrix} 2 \\ -2,4 \\ -1,6 \\ 0 \\ -2,4 \\ 1,6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 15150 & 0 & 300 & -15000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 15150 & 300 & 0 & -150 & 300 & 0 & 0 \\ 300 & 300 & 1600 & 0 & -300 & 400 & 0 & 0 \\ -15000 & 0 & 0 & 15076,8 & 0 & 192 & -76,8 & 0 \\ 0 & -150 & -300 & 0 & 12150 & -300 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 400 & 192 & -300 & 1440 & -192 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -76,8 & 0 & -192 & 86,8 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{Bmatrix}$$

(3.26)

donde:

$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \\ D_{10} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,02434m \\ -0,0001030m \\ -0,006483rad \\ 0,02432m \\ -0,0002712m \\ 0,003551rad \\ 0,02937m \end{Bmatrix}$$

(3.27)

### m) Cálculo das reações dos apoios

Calculados os deslocamentos nodais incógnitos, torna-se possível a solução da equação  $\{P\}_R = [K]_{RC}\{D\}_C + \{P_0\}_R$ . Sua solução apresentará as reações dos apoios procuradas.

$$\begin{Bmatrix} P_{11} \\ P_{12} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -12000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 192 & 0 & 0+320 & -192 \\ -150 & 0 & -300 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 300 & 0 & 400 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0,02434m \\ -0,0001030m \\ -0,006483rad \\ 0,02432m \\ -0,0002712m \\ 0,00355rad \\ 0,02937m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.28)

donde:

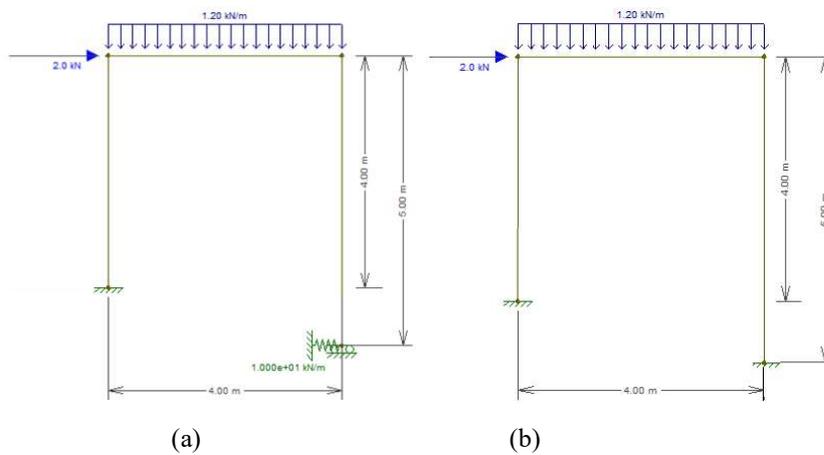
$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_{11} \\ P_{12} \\ P_{13} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1,71kN \\ 1,55kN \\ 4,70kNm \\ 3,36kN \\ 0,19kNm \\ -0,29kN \end{Bmatrix}$$

(3.29)

Para efeito de comparação entre os resultados aqui obtidos e os calculados através do Ftool, são apresentados nas figuras a seguir o pórtico analisado sob efeito da mola horizontal no apoio 4 bem como os diagramas dos esforços internos solicitantes além da deformada. Estes gráficos referidos são todos os que estão indicados com a letra (a).

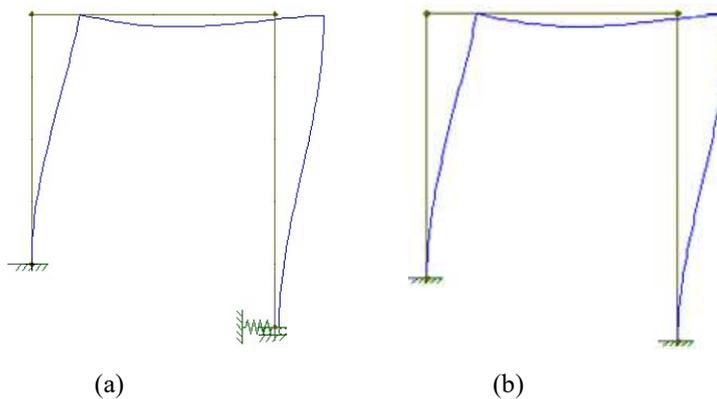
Os gráficos identificados com a letra (b) indicam os mesmos resultados observados nos letra (a), obtidos para o pórtico da Figura 11(b), no qual não atua a mola.

Figura 11 Pórticos: (a) com a mola horizontal no nó 4 e (b) sem a mola.



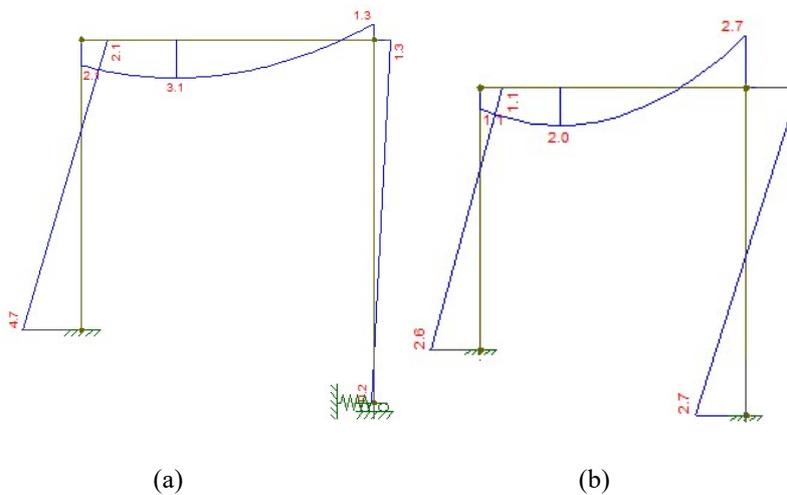
Fonte: O Autor (via Ftool)

Figura 12 Pórticos deslocados: (a) com a mola horizontal e (b) sem a mola.



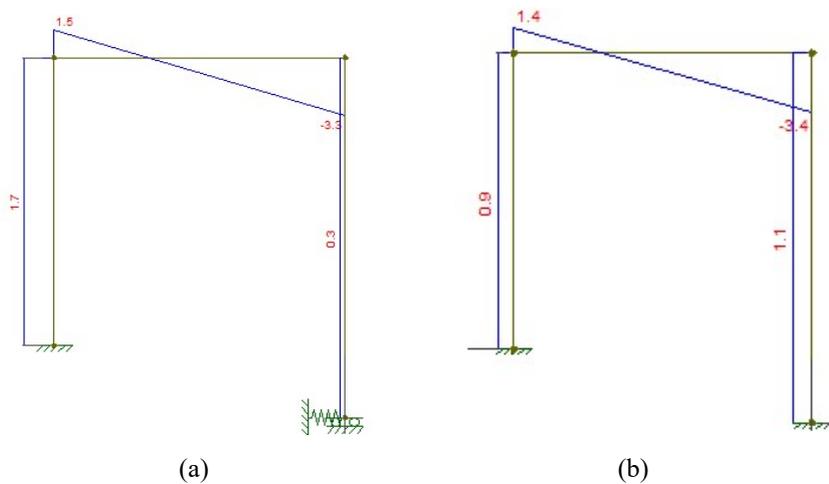
Fonte: O Autor (via Ftool)

Figura 13 Pórticos DMF: (a) com a mola horizontal e (b) sem a mola



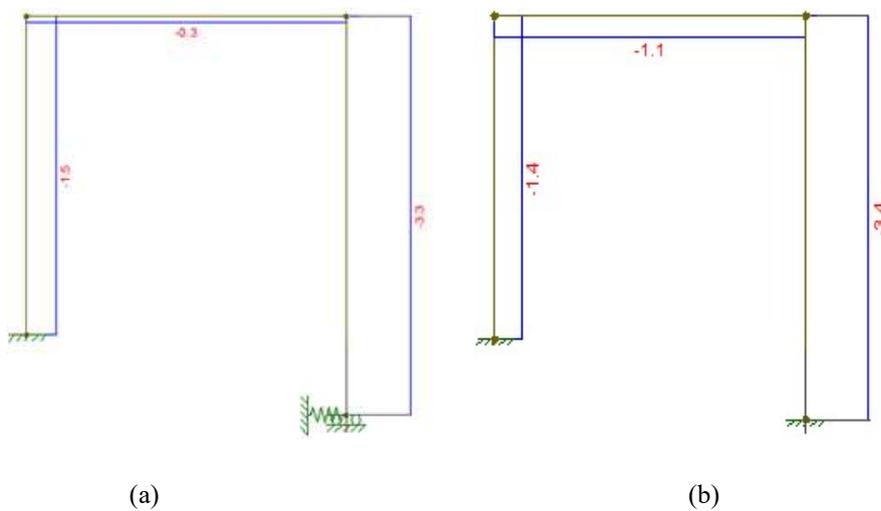
Fonte: O Autor (via Ftool)

Figura 14 Pórticos DEC: (a) com a mola horizontal e (b) sem a mola



Fonte: O Autor (via Ftool)

Figura 15 Pórticos, DEN: (a) com a mola horizontal e (b) sem a mola

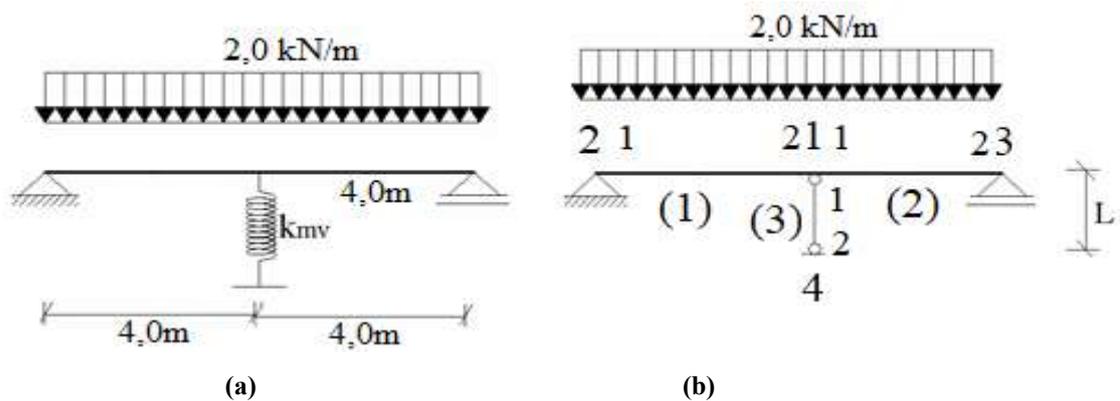


Fonte: O Autor (via Ftool)

- Análise da estrutura 2

Considerando a viga contínua mostrada na Fig. 16 calcular os deslocamentos nodais, as reações dos apoios. Sendo  $E$  o módulo de deformação longitudinal do concreto,  $L$  o comprimento das barras;  $A$  é a área da seção transversal das barras e  $I$  a inércia da seção transversal em torno do eixo  $z$ , a mola adotada será considerada como um pilar que se apoia em um determinado tipo de solo, e como a intenção não é tratar do assunto solo mas sim da variação de esforços quando se considera as deformações do maciço o coeficiente de mola será adotado como um valor qualquer apenas para demonstração.

Figura 16 Viga em base elástica.



Fonte: Adaptada de Cruz (2020, p.)

Pede-se considerar a inexistência de carregamento com projeção segundo o eixo  $X$ .

Dados:

$$E = 27700000 \text{ kN} / \text{m}^2$$

$$A = 0,04 \text{ m}^2$$

$$L_{(1)} = L_{(2)} = 4,0 \text{ m}$$

$$I = 0,00053 \text{ m}^4$$

$$p = 2,0 \text{ kN} / \text{m}$$

$$K_{m.v} = K_y = \frac{EA}{L_{(3)}} = 1000 \text{ kN} / \text{m}$$

Como citado anteriormente o valor do coeficiente de mola valor é aleatório apenas para representação do problema, não sendo relacionado a nenhum tipo de solo. O mesmo poderia ter sido relacionado a algum tipo de solo através de alguma correlação de tabelas padrões.

### Solução

### **a) Modelagem ou Discretização da estrutura**

Ver Figura 16 (b).

A inexistência de solicitação axial nas barras da estrutura possibilita a retirada dos esforços e dos deslocamentos paralelos à direção  $x$  (horizontal) do slr dessas barras e, conseqüentemente, dos elementos das 1<sup>as</sup> e 4<sup>as</sup> linhas e colunas das suas matrizes de rigidez. Isto significa dizer que os vetores  $\{p\}$  e  $\{d\}$  terão apenas 4 linhas, correspondentes às direções  $y$  e  $z$ , nas extremidades 1 e 2 de cada barra, chamadas de coordenadas 2,3,5 e 6.

### **b) Determinação das matrizes $[k]$ , $[T]$ e $[a]$ de cada uma das barras da estrutura**

#### **As matrizes de rigidez para as duas primeiras barras**

Nas extremidades das duas primeiras barras há continuidade do momento fletor, tornando obrigatório que elas sejam consideradas como barras de pórtico plano. Assim sendo, a matriz de rigidez a ser utilizada está mostrada com suas linhas e colunas numeradas.

$$[k] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1^a & 2^a & 3^a & 4^a & 5^a & 6^a \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a \\ 5^a \\ 6^a \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(3.30)

Retirando-se da Eq. (3.30) as 1<sup>as</sup> e 4<sup>as</sup> linhas e colunas devido à ausência de solicitação axial nas barras da estrutura – todo o carregamento é vertical -, e em seguida renumerando as linhas e colunas da matriz indicada na Eq. (3.31), obtém-se a matriz mostrada na Eq. (3.32). Nessa matriz os elementos remanescentes das 2<sup>as</sup>, 3<sup>as</sup>, 5<sup>as</sup> e 6<sup>as</sup> linhas e colunas passam a ocupar, respectivamente, as 1<sup>as</sup>, 2<sup>as</sup>, 3<sup>as</sup> e 4<sup>as</sup> linhas e colunas.

Diz-se que esta matriz de rigidez está de acordo com as novas coordenadas, nova numeração das direções  $y$  e  $z$  nas duas extremidades da barra, e em cada nó da estrutura. Ou seja, coordenadas 1, 2, 3 e 4.

$$[k] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1^a & 2^a & 3^a & 4^a & 5^a & 6^a \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1^a \\ 2^a \\ 3^a \\ 4^a \\ 5^a \\ 6^a \end{matrix} & \begin{bmatrix} & & & & & \\ & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ & & & & & \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & & & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & & & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

(3.31)

$$[k] = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

(3.32)

- **Matriz de rigidez da barra (1),  $[k]_{(1)}$**

$$[k]_{(1)} = \begin{bmatrix} 275,27 & 550,24 & -275,27 & 550,27 \\ 550,24 & 1468,1 & -550,27 & 734,05 \\ -275,27 & -550,27 & 275,27 & -550,27 \\ 550,54 & 734,05 & -550,27 & 1468,1 \end{bmatrix}$$

(3.33)

- **Matriz de rigidez da barra (2),  $[k]_{(2)}$**

Sendo a barra (2) do mesmo comprimento e do mesmo material que a barra (1), e tendo aquela a mesma seção transversal e as mesmas condições de contorno desta, então:

$$[k]_{(1)} = [k]_{(2)}$$

(3.34)

- **Matriz de rigidez da barra (3),  $[k]_{(3)}$  (biarticulada)**

Considerando a matriz de rigidez de barra biarticulada (barra de treliça plana) - pois estas são as condições de contorno da terceira barra que simula a mola da base elástica da viga - e procedendo de maneira análoga, tem-se, após substituir os valores das constantes indicadas:

$$[k]_{(3)} = 1000 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.35)

**c) Determinação das matrizes  $[T]$  de cada uma das barras da estrutura**

- **Calculo das matrizes de rotação para as barras (1) e (2)**

Como o ângulo entre os eixos de mesmo nome do sgr da estrutura e do slr das duas barras horizontais é zero, então a matriz de rotação é igual à matriz-identidade.

- **Calculo das matrizes de rotação para a barra (3), vertical.**

- Matriz de rotação da barra (3),  $[T]_{(3)}$

$$\alpha = 90^\circ$$

$$[T]_{(3)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(3.36)

**d) Determinação das matrizes  $[a]$  de cada uma das barras da estrutura**

- Matriz de incidência da barra (1),  $[a]_{(1)}$

$$[a]_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.37)

- Matriz de incidência da barra (2),  $[a]_{(2)}$

$$[a]_{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.38)

- Matriz de incidência da barra (3),  $[a]_{(3)}$

$$[a]_{(3)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.39)

**e) Cálculo do vetor  $\{p_0\}$  e  $\{p_0\}'$  de cada uma das barras. Cálculo do vetor  $\{P_0\}$  e montagem dos vetores  $\{P\}$  e  $\{D\}$ .**

De acordo com a nova numeração das direções de  $y$  e  $z$  nas extremidades das barras, os vetores  $\{p_0\}$  e  $\{p_0\}'$  passam a ter 4 linhas, sendo as 1ª e 3ª relativas aos esforços na direção  $y$  das extremidades 1 e 2; e as 2ª e 4ª, aos esforços na direção  $z$ , das duas extremidades.

- **Determinação do vetor  $\{p_0\}$  de cada uma das barras**

Considerando as barras (1) e (2) como vigas biengastadas com o carregamento ao longo do seu eixo longitudinal indicado na Figura 3.7, as reações dos apoios serão os elementos dos vetores  $\{p_0\}_{(1)}$  e  $\{p_0\}_{(2)}$ . Assim,

$$\{p_0\}_{(1)} = \{p_0\}_{(2)} = \begin{Bmatrix} 4 \\ 2,667 \\ 4 \\ -2,667 \end{Bmatrix} \quad \{p_0\}_{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.40 - \text{"a"}, \text{"b"} \text{ e$$

“c”)

- **Determinação do vetor  $\{p_0\}'$  de cada uma das barras**

Como o sgr e os slr das barras (1) e (2) têm eixos de mesmo nome paralelos, então:

$$\{p_0\} = \{p_0\}' \quad (3.41 - \text{"a"}, \text{"b"} \text{ e$$

“c”)

- **Determinação do vetor  $\{P_0\}$**

O vetor  $\{P_0\}$  pode ser obtido através do somatório:  $\sum_{i=1}^3 [a]_{(i)}^T \{p_0\}_{(i)}$ . Logo:

$$\{P_0\} = \begin{Bmatrix} 8kN \\ 0kNm \\ 4kN \\ 2,667kNm \\ 4kN \\ -2,667kNm \\ 0kN \\ 0kNm \end{Bmatrix} \quad \{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -8 \\ 0 \\ P_3 - 4 \\ P_4 - 2,667 \\ P_5 - 4 \\ P_6 + 2,667 \\ P_7 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.42)

- **Obtenção dos vetores  $\{P\}$  e  $\{D\}$**

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \\ P_7 \\ P_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \\ P_5 \\ 0 \\ P_7 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{D\} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.43 - \text{"a"} \text{ e$$

“b”)

- f) **Obtenção da matriz de rigidez  $[K]$  da estrutura e montagem da equação**

$$\{P\} = [K]\{D\}$$

- **Obtenção da matriz  $[K]$ , (através do procedimento formal):**

Utilização da equação  $[K] = \sum_{i=1}^3 [a]_{(i)}^T [k]_{(i)} [a]_{(i)}$

$$[K] = \begin{bmatrix} 1550,54 & 0 & -275,27 & -550,54 & -275,27 & 550,27 & -1000 & 0 \\ 0 & 2936,2 & 550,54 & 734,05 & -550,27 & 734,05 & 0 & 0 \\ -275,27 & -550,54 & 275,27 & 550,24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 550,54 & 734,05 & 550,24 & 1468,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -275,27 & -550,24 & 0 & 0 & 275,27 & -275,27 & 0 & 0 \\ 550,24 & 734,05 & 0 & 0 & -550,27 & 1468,1 & 0 & 0 \\ -1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.44)

a) Montagem da equação  $\{P\} - \{P_0\} = [K]\{D\}$

$$\begin{Bmatrix} 0-8 \\ 0-0 \\ P_3-4 \\ P_4-2,667 \\ P_5-4 \\ P_6+2,667 \\ P_7 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1550,54 & 0 & -275,27 & -550,54 & -275,27 & 550,27 \\ 0 & 2936,2 & 550,54 & 734,05 & -550,27 & 734,05 \\ -275,27 & -550,54 & 275,27 & 550,24 & 0 & 0 \\ 550,54 & 734,05 & 550,24 & 1468,1 & 0 & 0 \\ -275,27 & -550,24 & 0 & 0 & 275,27 & -275,27 \\ 550,24 & 734,05 & 0 & 0 & -550,27 & 1468,1 \\ -1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

(3.45)

$$D_1 = \frac{P_1 - P_{01}}{K_{11}} \frac{-8}{1550,54} = -0,005159m$$

(3.46)

$$P_2 = 0kN$$

(3.47)

$$P_3 = K_{31}D_1 = (-275,27)(-0,005159) + 4,00 = 5,42kN$$

(3.48)

$$P_4 = K_{41}D_1 = -550,54x(-0,005159) + 2,67 = 5,51kNm$$

(3.49)

$$P_5 = K_{51}D_1 + 4 = (-275,27)x(-0,005159) + 4 = 5,42kN$$

(3.50)

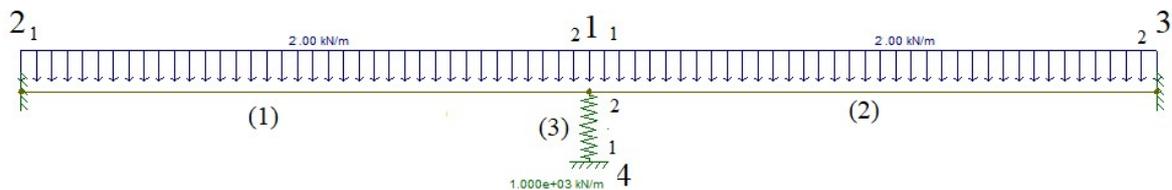
$$P_6 = K_{61}D_1 - 2,667 = 550,54x(-0,005159) - 2,67 = -5,51kNm$$

(3.51)

$$P_7 = K_{71}D_1 = -1000x(-0,005159) = 5,16kN$$

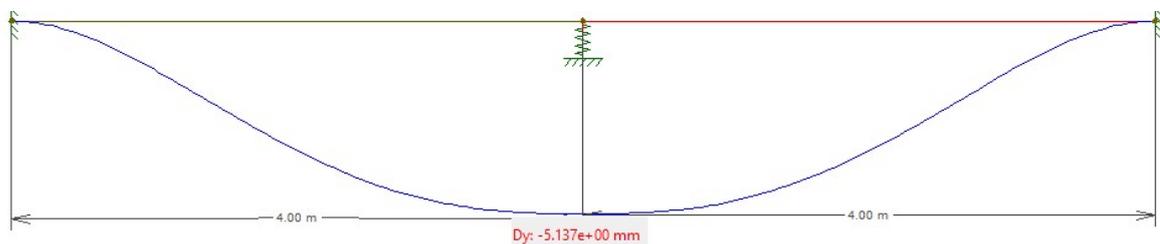
Com o objetivo de comparação entre os resultados aqui calculados e os obtidos via Ftool tendo como base de entrada o carregamento apresentado a seguir e as características dos materiais apresentados no início do problema, nas figuras a seguir são mostrados os deslocamentos do nó 1, bem como os diagramas dos esforços internos solicitantes para as barras da estrutura analisada.

**Figura 17 Viga sobre base elástica**



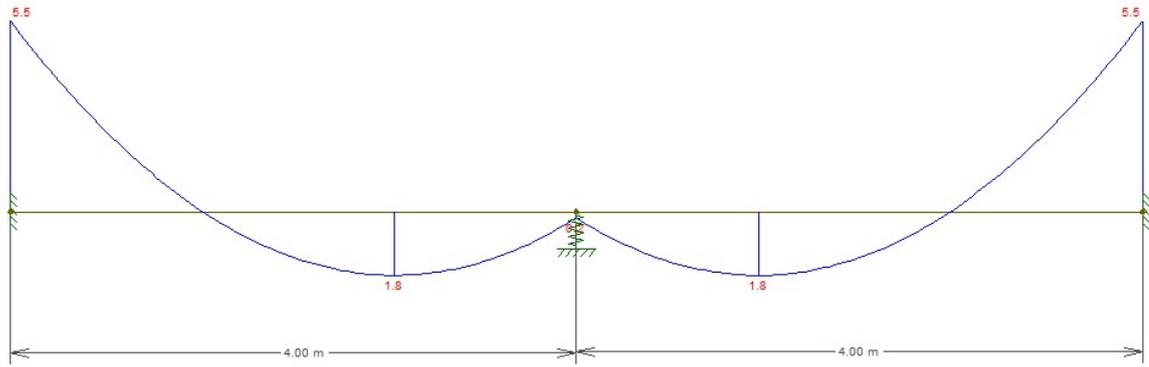
Fonte: Adaptada de Cruz (2020, p.)

**Figura 18 Viga sobre base elástica - Deformada**



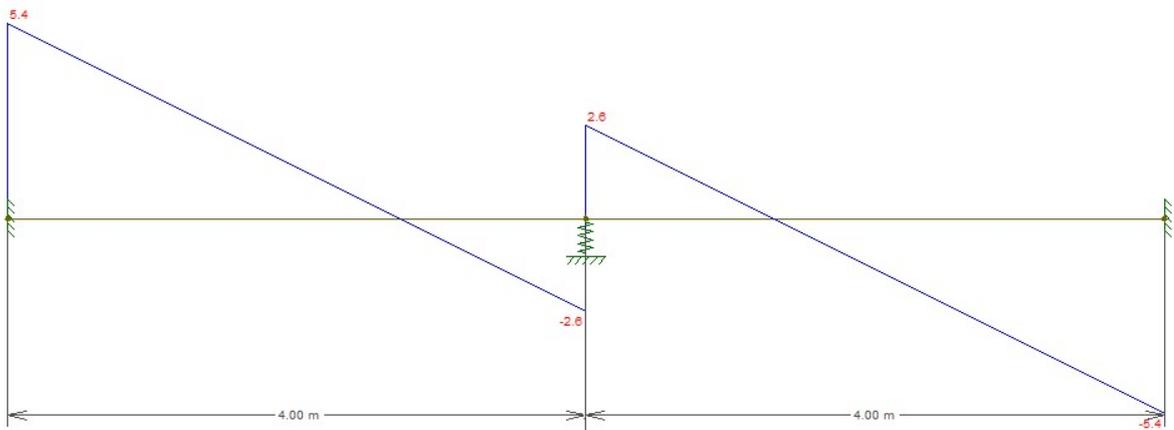
Fonte: Adaptada de Cruz (2020, p.)

**Figura 19 Viga sobre base elástica - DMF**



Fonte: Adaptada de Cruz (2020, p.)

Figura 20 Viga sobre base elástica - DEC



Fonte: Adaptada de Cruz (2020, p.)

#### 4. ANALISE DOS RESULTADOS

Os resultados aqui calculados apresentam muito boa aproximação aos resultados obtidos através do Ftool, conforme se vê na Tabela 1 e na Tabela 2 organizadas com os valores dos deslocamentos e das reações de apoio das duas estruturas analisadas.

**Tabela 1 Valores obtidos para a estrutura 1**

Nós	Valores	Deslocamentos			Reações de apoio		
		X (m)	Y (m)	Z (rad)	X (kN)	Y (kN)	Z (kNm)
1	TCC	0,0000000	0,0000000	0,0000000	-1,71	1,55	4,70
	Ftool	0,0000000	0,0000000	0,0000000	-1,60	-1,70	4,7
2	TCC	0,0243400	-0,0001030	-0,0064830	-	-	-
	Ftool	0,0243400	-0,0001030	-0,0064830	-	-	-
3	TCC	0,0243200	-0,0002712	0,0035510	-	-	-
	Ftool	0,0243200	-0,0002712	0,0035510	-	-	-
4	TCC	0,0293700	0,0000000	0,0000000	-0,29	3,36	0,19
	Ftool	0,0293700	0,0000000	0,0000000	-0,30	3,30	-0,20

Fonte: O Autor

**Tabela 2 Valores obtidos para a estrutura 2**

Nós	Valores	Deslocamentos		Reações de apoio	
		Y (m)	Z (rad)	Y (kN)	Z (kNm)
1	TCC	-0,005159	0,000000	-	-
	Ftool	-0,005140	0,000000	-	-
2	TCC	0,000000	0,000000	5,42	5,51

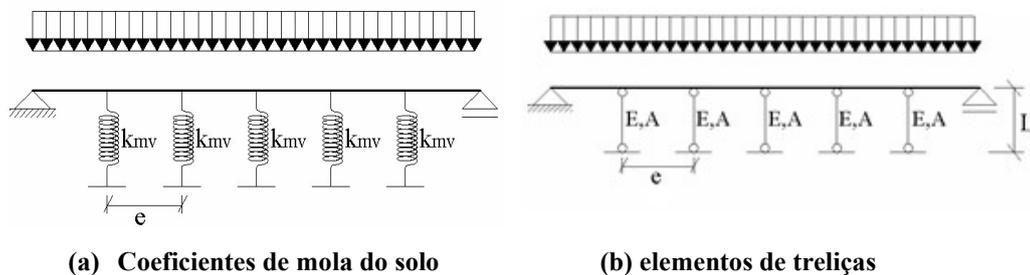
	<b>Ftool</b>	0,000000	0,000000	5,40	5,50
<b>3</b>	<b>TCC</b>	0,000000	0,000000	5,42	-5,51
	<b>Ftool</b>	0,000000	0,000000	5,40	-5,50

Fonte: O Autor

No caso da Tabela 1 tem-se na linha associada ao nó 4, valor obtido neste TCC, e na coluna associada ao deslocamento horizontal (eixo X), o valor -0,29. Este valor foi obtido como reação de apoio do nó 5, na coordenada associada, isto é coordenada 13) (vide Figura). O DEC fornecido pelo Ftool permite concluir que a reação horizontal do nó 4 (vide Figura) é -0,30. Na verdade, de acordo com o esquema indicado na Figura observa-se que o esforço normal na mola (barra biarticulada (4)), que é de compressão é exatamente igual à reação de apoio do nó 5.

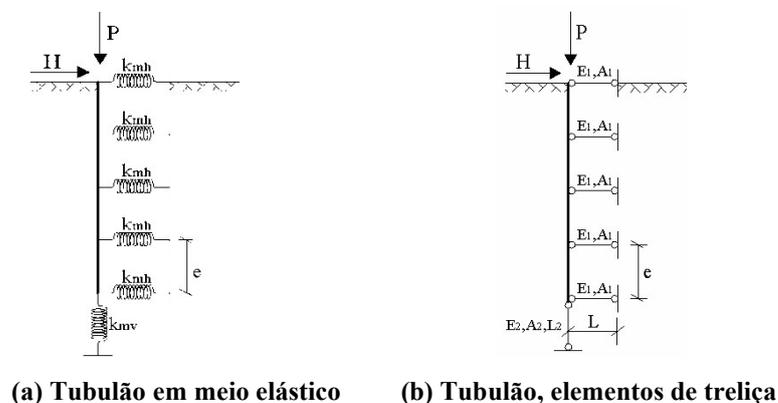
A estrutura 2 pode ser vista como uma viga contínua biengastada (podendo ser também biapoiada, etc) cujo apoio central esta assente sobre base elástica ou como uma viga biengastada apoiada no solo continuamente cuja reação foi discretizada (neste caso apenas para uma determinada posição, a metade do vão).

Figura 21 Viga sobre base elástica



Fonte: Adaptada de Cruz (2020, no prelo)

Figura 22 Tubulão em meio elástico



Fonte: Adaptada de Cruz (2020, no prelo)

Sendo o coeficiente de mola vertical do solo dado por  $k_{mv} = K_v b e$  onde  $K_v = E_s (fb)^{-1}$  o coeficiente de reação vertical, cuja unidade é  $[FL^{-3}]$ ,  $f$  é o fator de forma,  $E_s$  é o módulo de compressibilidade do solo e  $b$  é a base ou largura da viga e  $e$  é o espaçamento entre as molas. Sendo  $k_{mv} = k_{11} = \frac{EA}{L}$ , então o comprimento das barras verticais, mostradas na Figura 21 b, pode ser calculado através de  $L = \frac{EA}{k_{mv}}$  em que  $E$  e  $A$  são quase sempre iguais aos da viga. (Cruz, 2020, no prelo)

## 5. CONCLUSÕES

No presente Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) foi feita uma revisão do tema procurando estabelecer um Marco Teórico relacionado ao problema da análise estrutural com interação solo-estrutura, colocando em evidencia a aplicação das molas de Winkler. Alguns autores são citados com suas contribuições.

Do trabalho recente, ainda no prelo, Cruz (2020), o autor tomou como empréstimo a ideia de adicionar à estrutura original uma barra biarticulada para simular a base elástica que se quer (ou se necessita) considerar. A rigidez axial da barra  $EA/L$  é igual ao chamado coeficiente de mola,  $k_{mx}$  para molas paralelas ao eixo X do SGR (ou  $k_{mh}$  quando o eixo X coincidir com a direção horizontal),  $k_{my}$  para molas paralelas ao eixo Y do SGR (ou  $k_{mv}$ , quando o eixo Y coincidir com a direção vertical) ou  $k_{m\theta}$ , para as molas de rotação.

A formulação matricial para análise de estruturas planas é utilizada a partir da sua formulação linear.

Como o objetivo principal é a solução de estruturas sobre base elástica (molas de Winkler) através da Análise Matricial de Estruturas - AME, considerou-se importante apresentar tanto o processo formal como o dito processo prático para obtenção da matriz de rigidez global,  $[K]$ . Sempre com a intenção de promover uma maior generalização na aplicação da AME, a) a numeração dos nós da estrutura 1 foi definida de modo a tornar necessário uma reorganização da equação matricial que representa matematicamente o sistema físico em estudo e, b) na estrutura 2, apenas duas coordenadas em cada nó foram consideradas: a coordenada  $y$ ,  $Y$  e  $z$ ,  $Z$  referidas, respectivamente, ao SLR e ao SGR,

Desse modo duas estruturas foram analisadas. Todas as etapas da AME necessárias ao cálculo dos deslocamentos nodais desconhecidos e das reações de apoio procuradas estão detalhadas.

Podemos perceber que na análise dos esforços e deslocamentos considerando a base elástica percebemos considerável diferenças de valores na ordem de duas vezes para os máximos valores.

Além disso, os resultados aqui obtidos foram comparados com os calculados via Ftool. Para verificar a eficácia da consideração da barra deformável em relação a mla via método matricial dos deslocamentos. Quanto aos deslocamentos calculados no TCC e via Ftool, praticamente não se verificam diferenças; já em relação às reações de apoio, pequenas diferenças podem ser observadas.

Tal fato deve estar relacionado com a precisão adotada, pois como se sabe, a inversão da submatriz  $[K]_{CC}$  é bastante sensível a esta consideração.

Embora o efeito da base elástica na estrutura 1 tenha sido considerado apenas na direção horizontal no nó 4, poderiam ter sido aplicadas molas tanto na vertical quanto a mola de rotação neste mesmo nó 4 e bem assim no nó 1 tornando a análise ainda mais precisa do que a desse trabalho.

## REFERÊNCIAS

IWAMOTO, R. K. 2000. **Alguns aspectos dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios de múltiplos andares com fundação profunda**, Dissertação Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos. SP. 140p.

CRUZ. J.M.F.; **Estruturas – Introdução à Análise Matricial de Estruturas (Metodo dos Deslocamentos)**. EDUEPB. João Pessoa - PB (2007);

COLARES. G. M. (2006) **Programa para análise de interação solo-estrutura no projeto de edifícios**. Dissertação Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos – USP. São Carlos . SP. 83p.

TEIXEIRA, A. H., Godoy, N.S.; 1998. **Análise projeto e execução de fundações rasas**. In: Hachich, W. et col.; ed. Fundações, teoria e pratica. São Paulo; PINI. Cap 7; pp.227-264.

CRUZ. J.M.F.; **Contribuição à análise estática e dinâmica de pórticos pelo Método dos Elementos de Contorno**; Tese (Doutorado), CT. UFPB. João Pessoa – PB. 2012; 366f.

CINTRA. J.C. A.; AOKI. N.; ALBIERTO. J.H.; **Fundações diretas – projeto geotécnico**. 2011; Ed. Oficina de Textos. São Paulo. SP. 136p.

PAVAN; R. C.; COSTELLA; M. F.; GUARNIERI; G., **Interação solo-estrutura para sistemas estruturais reticulados sobre fundações rasas**. Rev. IBRACON Estrut. Mater. vol.7 no.2 São Paulo Apr. 2014.

SILVA. A. R. (1998) **Análise de Placas com Restrição de Contato**. Ouro Preto. Dissertação ; Mestrado. Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto; MG;

SILVA; L. F da; **Calculo dos esforços internos e deflexões de viga sobre a base elástica não linear usando o método da flexibilidade**. Dissertação Mestrado. UFOP; 2004. P6p.

Hetenyi, M. (1946) **Beams on Elastic Foundations**. University of Michigan Press, 255p.